CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

BÀI 1: KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

A. KIẾM THỨC CƠ BẢN

1. Đạo hàm của hàm só tại một điểm

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$, được gọi là có đạo hàm tại $x_0\in(a;b)$

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là **đạo hàm** của hàm số tại điểm x_0.Ta kí hiệu $f'(x_0)$.

$$\text{Vậy } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Quy tắc

Muốn tính đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta thực hiện hai bước sau:

- Bước 1: Tính Δy theo công thức $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0
- Bước 2: Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Trong quy tắc trên và đối với mỗi hàm số được xét, ta luôn hiểu Δy là số gia của hàm số ứng với số gia Δx đã cho của biến số tại điểm đang xét

Nhận xét : Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là:

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0).$$

Chú ý: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; f(x_0))$

– Song song với đường thẳng $y = ax + b \Rightarrow f'(x_0) = a$

– Vuông góc với đường thẳng $y = ax + b \Rightarrow f'(x_0).a = -1$

– Tạo với tia Ox một góc $\alpha \Rightarrow f'(x_0) = \tan\alpha$

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại điểm $s = s(t)$, tức là: $v(t_0) = s'(t_0)$.

5. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$.

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

B. Các dạng bài tập

Dạng 1: Tính đạo hàm tại 1 điểm

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm

Bước 1: Tính Δy theo công thức $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0

Bước 2: Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f\left(x\right) = x^2 + 2x,$ có Δx là số gia của đối số tại $x = 1,$ Δy là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó Δy bằng:

A. $\left(\Delta x\right)^2 + 2\Delta x.$ **B.** $\left(\Delta x\right)^2 + 4\Delta x.$ **C.** $\left(\Delta x\right)^2 + 2\Delta x - 3.$ **D.** $3.$

Hướng dẫn giải

$\Delta y = f\left(1 + \Delta x\right) - f\left(1\right) = \left(1 + \Delta x\right)^2 + 2\left(1 + \Delta x\right) - \left(1 + 2\right) = \left(\Delta x\right)^2 + 4\Delta x.$

Chọn đáp án là B.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{3x - 2},$ có Δx là số gia của đối số tại $x = 2.$

Khi đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3\Delta x - 2}}{\Delta x}.$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3\Delta x - 6}}{\Delta x}.$

C. $\dfrac{\sqrt{3\Delta x + 4} - 2}{\Delta x}.$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3\Delta x - 2} - 2}{\Delta x}.$

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right).$

Với Δx là số gia của đối số tại $x=2$ sao cho $2+\Delta x\in D,$ thì

$\Delta y=\sqrt{3\left(2+\Delta x\right)-2}-\sqrt{3.2-2}.$

Khi đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{3\Delta x+4}-2}{\Delta x}.$

Chọn đáp án là C.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ (C) Đạo hàm của hàm số đã cho tại $x=1,$ bằng:

A. $\dfrac{1}{4}.$ **B.** $-\dfrac{1}{2}.$ **C.** $0.$ **D.** $\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Với Δx là số gia của đối số tại $x=1,$ ta có

$\Delta y=\dfrac{\left(1+\Delta x\right)^2-2\left(1+\Delta x\right)}{\left(1+\Delta x\right)+1}-\dfrac{1-2}{1+1}=\dfrac{\Delta x\left(2\Delta x+1\right)}{2\left(2+\Delta x\right)};$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+1}{2\left(2+\Delta x\right)}.$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+1}{2\left(2+\Delta x\right)}=\dfrac{1}{4}.$ Vậy $y'(1)=\dfrac{1}{4}.$

Chọn đáp án là A.

Dạng 2: Phương trình tiếp tuyến

Sử dụng công thức viết tiếp tuyến tại 1 điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là:

$$y=f'\left(x_0\right).\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right).$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A\left(1;\dfrac{-1}{2}\right)$ là:

A. $y=\dfrac{1}{4}\left(x+1\right)-\dfrac{1}{2}.$ **B.** $y=\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)+\dfrac{1}{4}.$

C. $y=\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}.$ **D.** $y=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}.$

Lời giải

Với Δx là số gia của đối số tại $x=1,$ ta có

$$\Delta y=\frac{(1+\Delta x)^2-2(1+\Delta x)}{(1+\Delta x)+1}-\frac{1-2}{1+1}=\frac{\Delta x(2\Delta x+1)}{2(2+\Delta x)};\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+1}{2(2+\Delta x)}.$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+1}{2(2+\Delta x)}=\frac{1}{4}.$ Vậy $y'(1)=\frac{1}{4}.$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A\left(1;\frac{-1}{2}\right)$ là $y=\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}.$

Chọn đáp án là C.

Dạng 3 : Mối liên hệ giữa đạo hàm và liên tục

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0 nhưng điều ngược lại không đúng

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)=|x+1|.$ Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=-1.$ **B.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x=-1.$

C. $f(-1)=0.$ **D.** $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-1.$

Lời giải

$$f(x)=|x+1|=\begin{cases}(x+1), & \text{nếu } x\ge -1\\ -(x+1), & x<-1\end{cases}$$

$f(-1)=0\Rightarrow$ Phương án C đúng.

$f(x)\ge 0,\forall x.\quad f(x)=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow$ Phương án D đúng.

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0.\qquad \lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x-1)=0.\Rightarrow$ Phương án A đúng.

$\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{-x-1}{x+1}=-1,\qquad \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x+1}{x+1}=1.$

Suy ra không tồn tại giới hạn của tỷ số $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$ khi $x \to -1$.

Do đó hàm số đã cho không có đạo hàm tại $x=-1$.

Chọn đáp án là B.

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0. Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 là

A. $f(x_0)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số trên $\mathbb{R}$ định bởi $f(x)=x^2$ và $x_0\in\mathbb{R}$. Chọn câu đúng.

A. $f'(x_0)=x_0$.

B. $f'(x_0)=x_0^2$.

C. $f'(x_0)=2x_0$.

D. $f'(x_0)$ không tồn tại.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)$ bởi $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Đạo hàm của $f(x)$ tại $x_0=\sqrt{2}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$.

B. $\dfrac{1}{16}$.

C. $\dfrac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 2\\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x=2$ thì giá trị của b là

A. $b=3$. **B.** $b=6$. **C.** $b=1$. **D.** $b=-6$.

Câu 6: Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+1$ ứng với x và Δx là

A. $\Delta x\left(\Delta x+2x-4\right)$.
B. $2x+\Delta x$.
C. $\Delta x.\left(2x-4\Delta x\right)$.
D. $2x-4\Delta x$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Câu 8: Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm đó.

(3) Nếu $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f\left(x\right)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Trong ba câu trên:

A. Có hai câu đúng và một câu sai.
B. Có một câu đúng và hai câu sai.
C. Cả ba đều đúng.
D. Cả ba đều sai..

Câu 9: Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$

(2) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x=0$

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (2) đúng.
B. Chỉ có (1) đúng.
C. Cả hai đều đúng.
D. Cả hai đều sai.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của *a, b* thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

A. $a=1;b=-\dfrac{1}{2}.$ **B.** $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{2}.$

C. $a=\dfrac{1}{2};b=-\dfrac{1}{2}.$ **D.** $a=1;b=\dfrac{1}{2}.$

Câu 11: Số gia của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là

A. $\dfrac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2-\Delta x.$ **B.** $\dfrac{1}{2}\left[\left(\Delta x\right)^2-\Delta x\right].$

C. $\dfrac{1}{2}\left[\left(\Delta x\right)^2+\Delta x\right].$ **D.** $\dfrac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2+\Delta x.$

Câu 12: Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f\left(x\right)=2x\left(x-1\right)$ theo x và Δx là

A. $4x+2\Delta x+2.$ **B.** $4x+2\left(\Delta x\right)^2-2.$

C. $4x+2\Delta x-2.$ **D.** $4x\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2-2\Delta x.$

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\left(\Delta x\right)^2+2x\Delta x-\Delta x\right).$ **B.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x-1\right).$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x+1\right).$ **D.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\left(\Delta x\right)^2+2x\Delta x+\Delta x\right).$

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2+\left|x\right|$. Xét hai câu sau:

(1). Hàm số trên có đạo hàm tại $x=0$.

(2). Hàm số trên liên tục tại $x=0$.

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (1) đúng. **B.** Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Câu 15: Giới hạn (*nếu tồn tại*) nào sau đây dùng để định nghĩa đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0<1$?

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$ **D.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$

Câu 16: Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^3$ ứng với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. **B.** 7. **C.** 19. **D.** -7.

Đáp án+ hướng dẫn giải

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại x_0. Đạo hàm của $f\left(x\right)$ tại x_0 là

A. $f\left(x_0\right)$.

B. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Hướng dẫn giải

Đáp án C.

Định nghĩa $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ hay $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số trên $\mathbb{R}$ định bởi $f\left(x\right)=x^2$ và $x_0\in\mathbb{R}$. Chọn câu đúng.

A. $f'\left(x_0\right)=x_0$. **B.** $f'\left(x_0\right)=x_0^2$.

C. $f'\left(x_0\right)=2x_0$. **D.** $f'\left(x_0\right)$ không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Đáp án C.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0.

Ta có $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^2-x_0^2=\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x_0+\Delta x\right)=2x_0$.

Vậy $f'\left(x_0\right)=2x_0$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\left(0;+\infty\right)$ bởi $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$. Đạo hàm của $f\left(x\right)$ tại $x_0=\sqrt{2}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0.

Ta có $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0\left(x_0 + \Delta x\right)}$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x_0\left(x_0 + \Delta x\right)}\right) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'\left(x_0\right) = -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'\left(0\right)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Ta có $\lim_{x \to 0} \frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(2 - \sqrt{4 - x}\right)\left(2 + \sqrt{4 - x}\right)}{4x\left(2 + \sqrt{4 - x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{4x\left(2 + \sqrt{4 - x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4\left(2 + \sqrt{4 - x}\right)} = \frac{1}{16}.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{khi } x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2 \end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x=2$ thì giá trị của b là

A. $b=3.$ **B.** $b=6.$ **C.** $b=1.$ **D.** $b=-6.$

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Ta có

- $f\left(2\right)=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\dfrac{x^2}{2}+bx-6\right)=2b-8$

$f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=2$ khi và chỉ khi $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 2b-8=4\Leftrightarrow b=6.$

Câu 6: Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+1$ ứng với x và Δx là

A. $\Delta x\left(\Delta x+2x-4\right).$ **B.** $2x+\Delta x.$

C. $\Delta x.\left(2x-4\Delta x\right).$ **D.** $2x-4\Delta x.$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Ta có

$\Delta y=f\left(\Delta x+x\right)-f\left(x\right)$

$=\left(\Delta x+x\right)^2-4\left(\Delta x+x\right)+1-\left(x^2-4x+1\right)$

$=\Delta x^2+2\Delta x.x+x^2-4\Delta x-4x+1-x^2+4x-1=\Delta x^2+2\Delta x.x-4\Delta x$

$=\Delta x\left(\Delta x+2x-4\right)$

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

A. Đúng (theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm).
B. Đúng vì

$$\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=\Delta x+x_0$$
$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x+x_0-x_0}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

C. Đúng vì

Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=h+x_0,\ \Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h+x_0-x_0}=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Vậy **D** là đáp án sai.

Câu 8: Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm đó.

(3) Nếu $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f\left(x\right)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Trong ba câu trên:

A. Có hai câu đúng và một câu sai. **B.** Có một câu đúng và hai câu sai.

C. Cả ba đều đúng. **D.** Cả ba đều sai.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó. Đây là mệnh đề đúng.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Phản ví dụ

Lấy hàm $f(x) = |x|$ ta có $D = \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nhưng ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1 \end{cases}$

Nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Vậy mệnh đề (2) là mệnh đề sai.

(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Vì (1) là mệnh đề đúng nên ta có $f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Vậy (3) là mệnh đề đúng.

Câu 9: Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x = 0$

(2) Hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x = 0$

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (2) đúng. **B.** Chỉ có (1) đúng.
C. Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Ta có : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x+1}=0 \\ f(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x+1}=f(0)$. Vậy hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$

Ta có : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\dfrac{|x|}{x+1}-0}{x}=\dfrac{|x|}{x(x+1)}$ (với $x\neq 0$)

Do đó : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x+1}=-1 \end{cases}$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ khi $x\to 0$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ không có đạo hàm tại $x=0$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\leq 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của *a, b* thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

A. $a=1;b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{2}$.

C. $a=\dfrac{1}{2};b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1;b=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Hàm số liên tục tại $x=1$ nên Ta có $a+b=\dfrac{1}{2}$

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ nên giới hạn 2 bên của $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ bằng nhau và Ta có

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}a=a$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)}{2}=1$$

Vậy $a=1; b=-\frac{1}{2}$

Câu 11: Số gia của hàm số $f(x)=\frac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là

A. $\frac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x.$

B. $\frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2-\Delta x\right].$

C. $\frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2+\Delta x\right].$

D. $\frac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x.$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ Ta có

$$\Delta y=\frac{(1+\Delta x)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1+(\Delta x)^2+2\Delta x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x$$

Câu 12: Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x)=2x(x-1)$ theo x và Δx là

A. $4x+2\Delta x+2.$

B. $4x+2(\Delta x)^2-2.$

C. $4x+2\Delta x-2.$

D. $4x\Delta x+2(\Delta x)^2-2\Delta x.$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{2x(x-1)-2x_0(x_0-1)}{x-x_0}$$
$$=\frac{2(x-x_0)(x+x_0)-2(x-x_0)}{x-x_0}$$
$$=2x+2x_0-2$$
$$=4x+2\Delta x-2$$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x-\Delta x\right)$.
B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x-1\right)$.
C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x+1\right)$.
D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x+\Delta x\right)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Ta có :

$$\Delta y=\left(x_0+\Delta x\right)^2-\left(x_0+\Delta x\right)-\left(x_0^2-x_0\right)$$
$$=x_0^2+2x_0\Delta x+\left(\Delta x\right)^2-x_0-\Delta x-x_0^2+x_0$$
$$=\left(\Delta x\right)^2+2x_0\Delta x-\Delta x$$

Nên $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x_0-1\right)$

Vậy $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+2x-1\right)$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x^2+|x|$. Xét hai câu sau:

(1). Hàm số trên có đạo hàm tại $x=0$.

(2). Hàm số trên liên tục tại $x=0$.

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (1) đúng.
B. Chỉ có (2) đúng.
C. Cả hai đều đúng.
D. Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Ta có

+) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+x\right)=0$.

+) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-x\right)=0$.

+) $f(0)=0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

Mặt khác:

+) $f'\left(0^{+}\right)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x^{2}+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(x+1\right)=1$.

+) $f'\left(0^{-}\right)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x^{2}-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left(x-1\right)=-1$.

$\Rightarrow f'\left(0^{+}\right)\neq f'\left(0^{-}\right)$. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 15: Giới hạn (*nếu tồn tại*) nào sau đây dùng để định nghĩa đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0<1$?

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm thì biểu thức ở đáp án C đúng.

Câu 16: Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^{3}$ ứng với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. **B.** 7. **C.** 19. **D.** -7.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Ta có

$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^{3}-2^{3}={x_0}^{3}+\left(\Delta x\right)^{3}+3x_0\Delta x\left(x_0+\Delta x\right)-8$.

Với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ thì $\Delta y=19$.

CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

BÀI 2: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$;

Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 1$;

Hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$;

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $\left(0; +\infty\right)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + u.v'$ hệ quả $(k.u)' = k.u'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$ hệ quả $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

3. Đạo hàm hàm hợp

Cho hàm số $y = f(u(x)) = f(u)$ với $u = u(x)$.

Khi đó : $y'_x = y'_u . u'_x$

Đạo hàm của các hàm thường gặp

Đạo hàm	**Hàm hợp**
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

B. Bài tập

Dạng 1: Tính đạo hàm bằng các quy tắc đạo hàm

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$.

b) $y = \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$

c) $y = \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

d) $y = \frac{2x+1}{-3x+1}$

e) $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$

f) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có $y' = \left(x^2-1\right)'\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)'\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)'$

$$= 2x\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)2x\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)2x = 2x\left(3x^4-28x^2+49\right)$$

c) Ta có

$$y' = \left(\sqrt{x}+1\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) + \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) + \left(\sqrt{x}+1\right)\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

d) Ta có $y' = \frac{(2x+1)'(-3x+1)-(2x+1)(-3x+1)'}{(-3x+1)^2} = \frac{2(-3x+1)+3(2x+1)}{(-3x+1)^2} = \frac{5}{(-3x+1)^2}$.

e) Ta có

$$y' = \frac{\left(x^2-3x+3\right)'(x-1)-\left(x^2-3x+3\right)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(2x-3)(x-1)-\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

f) Ta có $y'=\dfrac{\left(1+x-x^2\right)'\left(1-x+x^2\right)-\left(1+x-x^2\right)\left(1-x+x^2\right)'}{\left(1-x+x^2\right)^2}$

$$=\frac{(1-2x)\left(1-x+x^2\right)-\left(1+x-x^2\right)(-1+2x)}{\left(1-x+x^2\right)^2}=\frac{2(1-2x)}{\left(1-x+x^2\right)^2}.$$

Dạng 2: Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\left(x^2+x+1\right)^4$.

b) $y=\left(x^2-2x\right)^5$.

c) $y=\dfrac{1}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$.

d) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$.

e) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$.

f) $y=\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)^3$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y'=4.\left(x^2+x+1\right)'.\left(x^2+x+1\right)^3=4.(2x+1).\left(x^2+x+1\right)^3$.

b) Ta có $y'=5.\left(x^2-2x\right)'.\left(x^2-2x\right)^4=5.(2x-2).\left(x^2-2x\right)^4$.

c) Ta có $y'=\dfrac{-\left[\left(x^2-2x+5\right)^2\right]'}{\left(x^2-2x+5\right)^4}=\dfrac{-2.\left(x^2-2x+5\right)'\left(x^2-2x+5\right)}{\left(x^2-2x+5\right)^4}=\dfrac{-2.(2x-2)}{\left(x^2-2x+5\right)^3}$.

d) Ta có $y'=\dfrac{\left[(x+1)^2\right]'.(x-1)^3-(x+1)^2.\left[(x-1)^3\right]'}{(x-1)^6}$

$$=\frac{2.(x+1)'.(x+1).(x-1)^3-(x+1)^2.3.(x-1)'.(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

$$=\frac{2.(x+1).(x-1)^3-3(x+1)^2.(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2.(x+1).(x-1)-3(x+1)^2}{(x-1)^4}=\frac{-x^2-6x-5}{(x-1)^4}.$$

e) Ta có

$$y'=3.\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'.\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2=3.\left[\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}\right].\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2=-\frac{9(2x+1)^2}{(x-1)^4}.$$

f) Ta có $y'=3.\left(2-\frac{3}{x^2}\right)'.\left(2-\frac{3}{x^2}\right)^2=3.\left(0+\frac{6}{x^3}\right).\left(2-\frac{3}{x^2}\right)^2=\frac{18}{x^3}.\left(2-\frac{3}{x^2}\right)^2.$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

b) $y=(x-2).\sqrt{x^2+3}$.

c) $y=\sqrt{(x-2)^3}$.

d) $y=\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^3$.

e) $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

f) $y=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y'=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4.\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

b) Ta có $y'=(x-2)'.\sqrt{x^2+3}+(x-2).\left(\sqrt{x^2+3}\right)'=\sqrt{x^2+3}+(x-2).\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}.$

c) Ta có $y'=\frac{\left[(x-2)^3\right]'}{2\sqrt{(x-2)^3}}=\frac{3.(x-2)'.(x-2)^2}{2\sqrt{(x-2)^3}}=\frac{3(x-2)^2}{2\sqrt{(x-2)^3}}=\frac{3(x-2)^2}{2\sqrt{(x-2)^3}}.$

d) Ta có

$$y'=3.\left(1+\sqrt{1-2x}\right)'.\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2=3.\left(0-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right).\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2=-\frac{3}{\sqrt{1-2x}}.\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2.$$

e) Ta có $y'=\dfrac{\left(\dfrac{x^3}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}=\dfrac{\dfrac{\left(x^3\right)'.(x-1)-x^3.(x-1)'}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}=\dfrac{\dfrac{3x^2.(x-1)-x^3}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}=\dfrac{x^2(2x-3)}{2.(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}.$

f) Ta có $y'=\dfrac{(4x+1)'\sqrt{x^2+2}-(4x+1)\left(\sqrt{x^2+2}\right)'}{x^2+2}=\dfrac{4\sqrt{x^2+2}-(4x+1)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{x^2+2}$

$$=\frac{-x+8}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$$

Dạng 3: Hàm trị tuyệt đối

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+1 & \text{khi } x>1\\ 2x+2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$

b) $f(x)=x^2+|x-1|$

Hướng dẫn giải

a) Với $x>1\Rightarrow f(x)=x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=2x-3$

Với $x\le 1\Rightarrow f(x)=2x+2\Rightarrow f'(x)=2$

Với $x=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-3x+1\right)=-1\ne f(1)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$, suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x=1$

Vậy $f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{khi } x>1\\ 2 & \text{khi } x<1\end{cases}.$

b) Với $x\ge 1\Rightarrow f(x)=x^2+x-1\Rightarrow f'(x)=2x+1$

Với $x<1 \Rightarrow f(x)=x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=2x-1$. Vậy $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 \text{ khi } x\ge 1 \\ 2x-1 \text{ khi } x<1 \end{cases}$

C. BÀI TẬP TRÁC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-3}{x-2}$. Đạo hàm y' của hàm số là biểu thức nào sau đây?

A. $-1-\dfrac{3}{(x-2)^2}$. **B.** $1+\dfrac{3}{(x-2)^2}$.

C. $-1+\dfrac{3}{(x-2)^2}$. **D.** $1-\dfrac{3}{(x-2)^2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Đạo hàm y' của hàm số là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **C.** $\dfrac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $-\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Giá trị $f'(8)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $-\dfrac{1}{12}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Để tính f', hai học sinh lập luận theo hai cách:

(I) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$.

(II) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$.

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II)

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 5. Cho hàm số $y=\frac{3}{1-x}$. Để $y'<0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. 1. **B.** 3. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0 **D.** Không tồn tại.

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-3}{x+2}$. Đạo hàm y' của hàm số là

A. $1+\frac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $\frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$.

C. $\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $\frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>0$ là

A. $\mathbb{R}\backslash\left\{1\right\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y=x^4-3x^2+x+1$ là

A. $y'=4x^3-6x^2+1$. **B.** $y'=4x^3-6x^2+x$.

C. $y'=4x^3-3x^2+x$. **D.** $y'=4x^3-3x^2+1$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây có $y'=2x+\frac{1}{x^2}$?

A. $y=\dfrac{x^3-1}{x}$

B. $y=\dfrac{3(x^2+x)}{x^3}$

C. $y=\dfrac{x^3+5x-1}{x}$

D. $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x}$

Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\left(1-2x^2\right)\sqrt{1+2x^2}$. Ta xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'\left(x\right)=\dfrac{-2x\left(1+6x^2\right)}{\sqrt{1+2x^2}}$

(II) $f\left(x\right).f'\left(x\right)=2x\left(12x^4-4x^2-1\right)$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (II).

B. Chỉ (I).

C. Cả hai đều sai.

D. Cả hai đều đúng.

Câu 12. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$. Đạo hàm của f tại $x=\sqrt{2}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$.

B. $-\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 13. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(3x^2-1\right)^2$. Giá trị $f'\left(1\right)$ là

A. 4.

B. 8.

C. -4.

D. 24.

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{-3}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}$.

B. $\dfrac{-3}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}$.

C. $\dfrac{-3}{x^4}-\dfrac{2}{x^3}$.

D. $\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{1}{x^3}$.

Câu 15. Đạo hàm của hàm số $y=-2x^7+\sqrt{x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-14x^6+2\sqrt{x}.$

B. $-14x^6+\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

C. $-14x^6+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

D. $-14x^6+\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$. Giá trị $f'(1)$ là

A. $\dfrac{1}{2}.$

B. $-\dfrac{1}{2}.$

C. – 2.

D. Không tồn tại.

Câu 17. Cho hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ thì $f'(2)$là kết quả nào sau đây?

A. $f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

B. $f'(2)=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}.$

C. $f'(2)=\dfrac{-2}{\sqrt{-3}}.$

D. Không tồn tại.

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$ là

A. $y'=\dfrac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}.$

B. $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}.$

C. $y'=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}.$

D. $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}.$

Câu 19. Đạo hàm của $y=\left(x^5-2x^2\right)^2$ là

A. $y'=10x^9-28x^6+16x^3.$

B. $y'=10x^9-14x^6+16x^3.$

C. $y' = 10x^9 + 16x^3.$

D. $y' = 7x^6 - 6x^3 + 16x.$

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = (7x-5)^4$ bằng biểu thức nào sau đây

A. $4(7x-5)^3.$

B. $-28(7x-5)^3.$

C. $28(7x-5)^3.$

D. $28x.$

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$ bằng biểu thức nào sau đây

A. $y' = \dfrac{2x-2}{\left(x^2-2x+5\right)^2}.$

B. $y' = \dfrac{-2x+2}{\left(x^2-2x+5\right)^2}.$

C. $y' = (2x-2)(x^2-2x+5).$

D. $y' = \dfrac{1}{2x-2}.$

Câu 22. Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$. Để $y' \le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây

A. $\left[-\dfrac{2}{9};0\right].$

B. $\left[-\dfrac{9}{2};0\right].$

C. $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right]\cup\left[0;+\infty\right).$

D. $\left(-\infty;-\dfrac{2}{9}\right]\cup\left[0;+\infty\right).$

Câu 23. Đạo hàm của $y = \dfrac{1}{2x^2+x+1}$ bằng :

A. $\dfrac{-\left(4x+1\right)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}.$

B. $\dfrac{-\left(4x-1\right)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}.$

C. $\dfrac{-1}{\left(2x^2+x+1\right)^2}.$

D. $\dfrac{\left(4x+1\right)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}.$

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = x.\sqrt{x^2-2x}$ là

A. $y' = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$.

B. $y' = \dfrac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

C. $y' = \dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

D. $y' = \dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = -2x^2 + 3x$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng

A. $4x-3$. **B.** $-4x+3$. **C.** $4x+3$. **D.** $-4x-3$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{x-1}$. Xét hai câu sau:

(I) $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\ \forall x \neq 1$ (II) $f'(x) > 0\ \forall x \neq 1$.

Hãy chọn câu đúng:

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai đều sai.

D. Cả hai đều đúng.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Xét hai câu sau:

$(I): f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1.$ $(II): f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1.$

Hãy chọn câu đúng:

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I); (II) đều sai.

D. Cả (I); (II) đều đúng.

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$ là:

A. $y' = 2016(x^3-2x^2)^{2015}$.

B. $y' = 2016(x^3-2x^2)^{2015}(3x^2-4x)$.

C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.

D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$.

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x(1-3x)}{x+1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{-9x^2 - 4x + 1}{(x+1)^2}$.

B. $\dfrac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}$.

C. $1 - 6x^2$.

D. $\dfrac{1 - 6x^2}{(x+1)^2}$.

Câu 30. Đạo hàm của $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ bằng:

A. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$.

B. $\dfrac{6x-2}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$.

C. $\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\dfrac{-3x^2 - 13x - 10}{(x^2+3)^2}$.

B. $\dfrac{-x^2 + x + 3}{(x^2+3)^2}$.

C. $\dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2}$.

D. $\dfrac{-7x^2 - 13x - 10}{(x^2+3)^2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 4}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\dfrac{4x+5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.

B. $\dfrac{4x+5}{\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.

C. $\dfrac{2x+5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.

D. $\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng:

A. 6.

B. 3.

C. -2.

D. -6.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=ax+b.$ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $f'(x)=-a.$ **B.** $f'(x)=-b.$ **C.** $f'(x)=a.$ **D.** $f'(x)=b.$

Câu 35. Đạo hàm của hàm số $y=10$ là:

A. $10.$ **B.** $-10.$ **C.** $0.$ **D.** $10x.$

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=2mx-mx^3$. Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 1$ khi và chỉ khi:

A. $m\ge 1.$ **B.** $m\le -1.$ **C.** $-1\le m\le 1.$ **D.** $m\ge -1.$

Câu 37. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$ tại điểm $x=0$ là kết quả nào sau đây?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Không tồn tại.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{khi } x\ge 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$. Hãy chọn câu **sai:**

A. $f'(1)=1$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$.

C. Hàm số liên tục tại $x_0=1$. **D.** $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\ge 1 \\ 2 & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=k.\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$. Với giá trị nào của k thì $f'(1)=\frac{3}{2}$?

A. $k=1.$ **B.** $k=\frac{9}{2}.$ **C.** $k=-3.$ **D.** $k=3.$

Câu 40. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sqrt{x}}{1-2x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$. **B.** $\frac{1}{-4\sqrt{x}}$.

C. $\frac{1-2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$. **D.** $\frac{1+2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

Câu 41. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{2x-3}{5+x}-\sqrt{2x}$ là:

A. $y'=\frac{13}{(x+5)^2}-\frac{1}{\sqrt{2x}}$. **B.** $y'=\frac{17}{(x+5)^2}-\frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

C. $y'=\frac{13}{(x+5)^2}-\frac{1}{2\sqrt{2x}}$. **D.** $y'=\frac{17}{(x+5)^2}-\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 42. Đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là:

A. $y'=2\sqrt{x^2+x}-\frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **B.** $y'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **D.** $y'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 43. Cho hàm số $y=\frac{3x+5}{-1+2x}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\frac{7}{(2x-1)^2}$. **B.** $\frac{1}{(2x-1)^2}$. **C.** $-\frac{13}{(2x-1)^2}$. **D.** $\frac{13}{(2x-1)^2}$.

Câu 44. Đạo hàm của $y=\left(x^3-2x^2\right)^2$ bằng :

A. $6x^5-20x^4+16x^3$. **B.** $6x^5+16x^3$.

C. $6x^5-20x^4+4x^3$. **D.** $6x^5-20x^4-16x^3$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\frac{2x+5}{x^2+3x+3}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\frac{2x^2+10x+9}{(x^2+3x+3)^2}$. **B.** $\frac{-2x^2-10x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

C. $\frac{x^2-2x-9}{(x^2+3x+3)^2}$. **D.** $\frac{-2x^2-5x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$. Tập hợp những giá trị của x để $f'\left(x\right)=0$ là:

A. $\left\{-2\sqrt{2}\right\}$. **B.** $\left\{2;\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{-4\sqrt{2}\right\}$. **D.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$.

Câu 47. Đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x+9}{x+3}+\sqrt{4x}$ tại điểm $x=1$ bằng:

A. $-\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{25}{16}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{11}{8}$.

Câu 48. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $\frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **C.** $\frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **D.** $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Câu 49. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ là:

A. $y'=-\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}$. **B.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $y'=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4\sqrt{x-1}}$. **D.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=4x-\sqrt{x}$. Nghiệm của phương trình $y'=0$ là

A. $x=\frac{1}{8}$. **B.** $x=\sqrt{\frac{1}{8}}$. **C.** $x=\frac{1}{64}$. **D.** $x=-\frac{1}{64}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{-x^2+2x-3}{x-2}$. Đạo hàm y' của hàm số là biểu thức nào sau đây?

A. $-1-\frac{3}{(x-2)^2}$.

B. $1+\frac{3}{(x-2)^2}$.

C. $-1+\frac{3}{(x-2)^2}$.

D. $1-\frac{3}{(x-2)^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\frac{\left(-x^2+2x-3\right)'\left(x-2\right)-\left(-x^2+2x-3\right)\left(x-2\right)'}{\left(x-2\right)^2}$.

$$=\frac{\left(-2x+2\right)\left(x-2\right)-\left(-x^2+2x-3\right).1}{\left(x-2\right)^2}=\frac{-x^2+4x-1}{\left(x-2\right)^2}=-1+\frac{3}{\left(x-2\right)^2}$$

Đáp án **C.**

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Đạo hàm y' của hàm số là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

B. $-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $\frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

D. $-\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hướng dẫn giải

$$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\frac{-\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}.$$

Đáp án **B.**

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$. Giá trị $f'\left(8\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải

Với $x>0$ $f'\left(x\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\Rightarrow f'\left(8\right)=\frac{1}{3}.8^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3}2^{-2}=\frac{1}{12}$.

Đáp án **B.**

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Để tính f', hai học sinh lập luận theo hai cách:

(I) $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{x-2}{2\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}$.

(II) $f\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}=\frac{x-2}{2\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}$.

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II)

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải

$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

Lại có $\left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)' = \frac{\sqrt{x-1}-\frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}(x-1)}$ nên cả hai đều đúng.

Đáp án **D.**

Câu 5. Cho hàm số $y=\frac{3}{1-x}$. Để $y'<0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. 1. **B.** 3. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$.

$y'=\frac{3}{(1-x)^2}>0\forall x\in D$. **Chọn C.**

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1.

C. 0 **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ **Đáp án D.**

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-3}{x+2}$. Đạo hàm y' của hàm số là

A. $1+\frac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $\frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$.

C. $\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $\frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{\left(x^2+2x-3\right)'(x+2)-(x+2)'\left(x^2+2x-3\right)}{(x+2)^2} = \frac{(2x+2)(x+2)-\left(x^2+2x-3\right)}{(x+2)^2}$$

$$\frac{(2x+2)(x+2)-\left(x^2+2x-3\right)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2} = 1+\frac{3}{(x+2)^2}.$$

Đáp án **A.**

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>0$ là

A. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

$$f'(x)=\left(\frac{1-3x+x^2}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\left(1-3x+x^2\right)'(x-1)-\left(1-3x+x^2\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(-3+2x)(x-1)-\left(1-3x+x^2\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2}>0, \forall x\neq 1$$

Đáp án A

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y=x^4-3x^2+x+1$ là

A. $y'=4x^3-6x^2+1$. **B.** $y'=4x^3-6x^2+x$.

C. $y'=4x^3-3x^2+x$. **D.** $y'=4x^3-3x^2+1$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức **Đáp án A**

Câu 10. Hàm số nào sau đây có $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$?

A. $y = \frac{x^3 - 1}{x}$

B. $y = \frac{3(x^2 + x)}{x^3}$

C. $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$

D. $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x}$

Hướng dẫn giải

Kiểm tra đáp án A $y = \frac{x^3 - 1}{x} = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 2x + \frac{1}{x^2}$ đúng.

Đáp án A

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = \left(1 - 2x^2\right)\sqrt{1 + 2x^2}$. Ta xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(x) = \frac{-2x\left(1 + 6x^2\right)}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

(II) $f(x).f'(x) = 2x\left(12x^4 - 4x^2 - 1\right)$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (II).

B. Chỉ (I).

C. Cả hai đều sai.

D. Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$f'(x)=\left(1-2x^2\right)'\sqrt{1+2x^2}+\left(1-2x^2\right)\left(\sqrt{1+2x^2}\right)'=-4x\sqrt{1+2x^2}+\left(1-2x^2\right)\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}$$
$$=\frac{-4x\left(1+2x^2\right)+\left(1-2x^2\right).2x}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{-2x-12x^3}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{-2x\left(1+6x^2\right)}{\sqrt{1+2x^2}}$$

Suy ra

$$f(x).f'(x)=\left(1-2x^2\right)\sqrt{1+2x^2}.\frac{-2x\left(1+6x^2\right)}{\sqrt{1+2x^2}}=-2x\left(1-2x^2\right)\left(1+6x^2\right)$$
$$=-2x\left(-12x^4+4x^2+1\right)=2x\left(12x^4-4x^2-1\right)$$

Đáp án D

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$. Đạo hàm của f tại $x=\sqrt{2}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}$ **Đáp án B**

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\left(3x^2-1\right)^2$. Giá trị $f'(1)$ là

A. 4. **B.** 8. **C.** -4. **D.** 24.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=2\left(3x^2-1\right)\left(3x^2-1\right)'=12x\left(3x^2-1\right)\Rightarrow f'(1)=24$

Đáp án D

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^3}$.

B. $\frac{-3}{x^4}+\frac{2}{x^3}$.

C. $\frac{-3}{x^4}-\frac{2}{x^3}$.

D. $\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{3x^2}{x^6}+\frac{2x}{x^4}=-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^3}$

Đáp án A

Câu 15. Đạo hàm của hàm số $y=-2x^7+\sqrt{x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-14x^6+2\sqrt{x}$.

B. $-14x^6+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

C. $-14x^6+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $-14x^6+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\left(-2x^7+\sqrt{x}\right)'=-14x^6+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Đáp án C

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x}{x-1}$. Giá trị $f'\left(1\right)$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. – 2.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=\left(\frac{2x}{x-1}\right)'=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$

Suy ra không tồn tại $f'(1)$.

Đáp án D

Câu 17. Cho hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ thì $f'(2)$ là kết quả nào sau đây?

A. $f'(2)=\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $f'(2)=\frac{-2}{\sqrt{3}}$. **C.** $f'(2)=\frac{-2}{\sqrt{-3}}$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có $f'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

Không tồn tại $f'(2)$.

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$ là

A. $y'=\frac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$. **B.** $y'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y'=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$. **D.** $y'=\frac{1}{2}.\frac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án **D.**

Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}}.\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \frac{1}{2}.\frac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$

Câu 19. Đạo hàm của $y = \left(x^5 - 2x^2\right)^2$ là

A. $y' = 10x^9 - 28x^6 + 16x^3.$

B. $y' = 10x^9 - 14x^6 + 16x^3.$

C. $y' = 10x^9 + 16x^3.$

D. $y' = 7x^6 - 6x^3 + 16x.$

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 2.\left(x^5 - 2x^2\right)\left(x^5 - 2x^2\right)' = 2\left(x^5 - 2x^2\right)\left(5x^4 - 4x\right) = 10x^9 - 28x^6 + 16x^3.$

Đáp án A

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = (7x-5)^4$ bằng biểu thức nào sau đây

A. $4(7x-5)^3.$

B. $-28(7x-5)^3.$

C. $28(7x-5)^3.$

D. $28x.$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Vì $y' = 4(7x-5)^3(7x-5)' = 28(7x-5)^3.$

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ bằng biểu thức nào sau đây

A. $y' = \frac{2x-2}{\left(x^2 - 2x + 5\right)^2}.$

B. $y' = \frac{-2x+2}{\left(x^2 - 2x + 5\right)^2}.$

C. $y' = (2x-2)(x^2 - 2x + 5).$

D. $y' = \frac{1}{2x-2}.$

Hướng dẫn giải

Vì $y' = -\dfrac{\left(x^2-2x+5\right)'}{\left(x^2-2x+5\right)^2} = \dfrac{-2x+2}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$.

Đáp án B

Câu 22. Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$. Để $y' \le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây

A. $\left[-\dfrac{2}{9};0\right]$.

B. $\left[-\dfrac{9}{2};0\right]$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right]\cup\left[0;+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\dfrac{2}{9}\right]\cup\left[0;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

$y = 3x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 9x^2 + 2x$

$y' \le 0 \Rightarrow -\dfrac{2}{9} \le x \le 0$

Đáp án A

Câu 23. Đạo hàm của $y = \dfrac{1}{2x^2+x+1}$ bằng :

A. $\dfrac{-(4x+1)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$.

B. $\dfrac{-(4x-1)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$.

C. $\dfrac{-1}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$.

D. $\dfrac{(4x+1)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$.

Hướng dẫn giải

$$y=\frac{1}{2x^2+x+1}\Rightarrow y'=\frac{-\left(2x^2+x+1\right)'}{\left(2x^2+x+1\right)^2}=\frac{-\left(4x+1\right)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$$

Đáp án A

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y=x.\sqrt{x^2-2x}$ là

A. $y'=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$.

B. $y'=\frac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

C. $y'=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

D. $y'=\frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Hướng dẫn giải

$$y=x.\sqrt{x^2-2x}\Rightarrow y'=\sqrt{x^2-2x}+x.\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$$

Đáp án C

Câu 25. Cho hàm số $f\left(x\right)=-2x^2+3x$. Hàm số có đạo hàm $f'\left(x\right)$ bằng

A. $4x-3$.

B. $-4x+3$.

C. $4x+3$.

D. $-4x-3$.

Hướng dẫn giải

$f\left(x\right)=-2x^2+3x\Rightarrow f'\left(x\right)=-4x+3$ **Đáp án B**

Câu 26. Cho hàm số $f\left(x\right)=x+1-\frac{2}{x-1}$. Xét hai câu sau:

(I) $f'\left(x\right)=\frac{x^2-2x-1}{\left(x-1\right)^2}\ \forall x\neq 1$ (II) $f'\left(x\right)>0\ \forall x\neq 1$.

Hãy chọn câu đúng:

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai đều sai.

D. Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải

$$f\left(x\right)=x+1-\frac{2}{x-1}\Rightarrow f'\left(x\right)=1+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}=\frac{x^2-2x+3}{\left(x-1\right)^2}>0\ \forall x\neq 1$$

Đáp án B

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Xét hai câu sau:

$(I): f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2},\ \forall x\neq 1.$ $(II): f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2},\ \forall x\neq 1.$

Hãy chọn câu đúng:

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I); (II) đều sai.

D. Cả (I); (II) đều đúng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$ ta có:

$\forall x\neq 1$, ta có: $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x^2+x-1)'.(x-1)-(x-1)'.(x^2+x-1)}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+1).(x-1)-1.(x^2+x-1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x+1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\Rightarrow (II)\text{ đúng.}$$

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}\Rightarrow (I)$ đúng.

Chọn D

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y=(x^3-2x^2)^{2016}$ là:

A. $y'=2016(x^3-2x^2)^{2015}$.

B. $y'=2016(x^3-2x^2)^{2015}(3x^2-4x)$.

C. $y'=2016(x^3-2x^2)(3x^2-4x)$.

D. $y'=2016(x^3-2x^2)(3x^2-2x)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=x^3-2x^2$ thì $y=u^{2016}$, $y'_u=2016.u^{2015}$, $u'_x=3x^2-4x$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có: $y'_x=y'_u.u'_x$.

Vậy: $y'=2016.(x^3-2x^2)^{2015}.(3x^2-4x)$.

Chọn B

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}$.

B. $\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$.

C. $1-6x^2$.

D. $\dfrac{1-6x^2}{(x+1)^2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$. Có: $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}=\dfrac{-3x^2+x}{x+1}$, nên:

$$y'=\frac{(-3x^2+x)'.(x+1)-(x+1)'.(-3x^2+x)}{(x+1)^2}=\frac{(-6x+1).(x+1)-1.(-3x^2+x)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-6x^2-6x+x+1+3x^2-x}{(x+1)^2}=\frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$$

Chọn B

Câu 30. Đạo hàm của $y=\sqrt{3x^2-2x+1}$ bằng:

A. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

B. $\dfrac{6x-2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

C. $\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+1}}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ta được:

$$y=\sqrt{3x^2-2x+1}\Rightarrow y'=\frac{(3x^2-2x+1)'}{2\sqrt{3x^2-2x+1}}=\frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x+1}}=\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}.$$

Chọn A

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\dfrac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$.

B. $\dfrac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}$.

C. $\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$.

D. $\dfrac{-7x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$.Ta có:

$$y=\frac{-2x^2+x-7}{x^2+3}\Rightarrow y'=\frac{(-2x^2+x-7)'.(x^2+3)-(x^2+3)'.(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(-4x+1).(x^2+3)-2x.(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2}=\frac{-4x^3-12x+x^2+3+4x^3-2x^2+14x}{(x^2+3)^2}$$

$\Rightarrow y' = \dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$

Chọn C

Câu 32. Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+5x-4}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\dfrac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}.$

B. $\dfrac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}.$

C. $\dfrac{2x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}.$

D. $\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ta được:

$$y=\sqrt{2x^2+5x-4} \Rightarrow y' = \frac{(2x^2+5x-4)'}{2\sqrt{2x^2+5x-4}} = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}.$$

Chọn A

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=2x^3+1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng:

A. 6. **B.** 3. **C.** -2. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Có $f(x)=2x^3+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2 \Rightarrow f'(-1) = 6.(-1)^2 = 6.$

Chọn A

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=ax+b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $f'(x)=-a.$ **B.** $f'(x)=-b.$ **C.** $f'(x)=a.$ **D.** $f'(x)=b.$

Hướng dẫn giải

Có $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a.$

Chọn C

Câu 35. Đạo hàm của hàm số $y = 10$ là:

A. $10.$ **B.** $-10.$ **C.** $0.$ **D.** $10x.$

Hướng dẫn giải

Có $y = 10 \Rightarrow y' = 0.$

Chọn C

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = 2mx - mx^3$. Số $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 1$ khi và chỉ khi:

A. $m \ge 1.$ **B.** $m \le -1.$ **C.** $-1 \le m \le 1.$ **D.** $m \ge -1.$

Hướng dẫn giải

Có $f(x) = 2mx - mx^3 \Rightarrow f'(x) = 2m - 3mx^2$. Nên $f'(1) \le 1 \Leftrightarrow 2m - 3m \le 1 \Leftrightarrow m \ge -1.$

Chọn D

Câu 37. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ tại điểm $x = 0$ là kết quả nào sau đây?

A. 0 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Tập xác định của hàm số là: $D = (0; +\infty)$.

$x = 0 \notin D \Rightarrow$ không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Chọn D

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \ge 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Hãy chọn câu **sai:**

A. $f'(1) = 1$.

B. Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

C. Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

D. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \ge 1 \\ 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 1) = 1$.

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 1$. C đúng.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(2x - 1) - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$

Vậy hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và $f'(1) = 2$

Vậy A sai. **Chọn A**

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = k.\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$. Với giá trị nào của k thì $f'(1) = \dfrac{3}{2}$?

A. $k = 1$.

B. $k = \dfrac{9}{2}$.

C. $k = -3$.

D. $k = 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=\left(k.x^{\frac{1}{3}}+\sqrt{x}\right)'=k.\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}k+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}k=1\Leftrightarrow k=3$

Chọn D

Câu 40. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sqrt{x}}{1-2x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

B. $\frac{1}{-4\sqrt{x}}$.

C. $\frac{1-2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

D. $\frac{1+2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$y'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'.(1-2x)-(1-2x)'.\sqrt{x}}{(1-2x)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.(1-2x)+2\sqrt{x}}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1-2x+4x}{2\sqrt{x}}}{(1-2x)^2}=\frac{1+2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}.$$

Chọn D

Câu 41. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{2x-3}{5+x}-\sqrt{2x}$ là:

A. $y'=\frac{13}{(x+5)^2}-\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

B. $y'=\frac{17}{(x+5)^2}-\frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

C. $y' = \frac{13}{(x+5)^2} - \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

D. $y' = \frac{17}{(x+5)^2} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $y' = \frac{(2x-3)'.(5+x)-(2x-3).(5+x)'}{(5+x)^2} - \frac{(2x)'}{2\sqrt{2x}}$

$= \frac{2(5+x)-(2x-3)}{(5+x)^2} - \frac{2}{2\sqrt{2x}}. = \frac{10+2x-2x+3}{(5+x)^2} - \frac{x}{\sqrt{2x}} = \frac{13}{(5+x)^2} - \frac{x}{\sqrt{2x}}$.

Cách 2: Ta có $y' = \frac{2.5+3.1}{(5+x)^2} - \frac{(2x)'}{2\sqrt{2x}} = \frac{13}{(5+x)^2} - \frac{x}{\sqrt{2x}}$.

Chọn A

Có thể dùng công thức $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$**.**

Câu 42. Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là:

A. $y' = 2\sqrt{x^2+x} - \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

B. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

D. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = (2x-1)'.\sqrt{x^2+x} + (2x-1).\left(\sqrt{x^2+x}\right)' = 2.\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}$

$= 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Chọn C

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+5}{-1+2x}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\dfrac{7}{(2x-1)^2}$. **B.** $\dfrac{1}{(2x-1)^2}$. **C.** $-\dfrac{13}{(2x-1)^2}$. **D.** $\dfrac{13}{(2x-1)^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\dfrac{(3x+5)'.(2x-1)-(3x+5)(2x-1)'}{(2x-1)^2}$

$=\dfrac{3(2x-1)-2(3x+5)}{(2x-1)^2}=\dfrac{-13}{(2x-1)^2}$

Chọn C

Có thể dùng công thức $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$

Câu 44. Đạo hàm của $y=\left(x^3-2x^2\right)^2$ bằng :

A. $6x^5-20x^4+16x^3$. **B.** $6x^5+16x^3$.

C. $6x^5-20x^4+4x^3$. **D.** $6x^5-20x^4-16x^3$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Áp dụng công thức $\left(u^n\right)'$

Ta có $y'=2.\left(x^3-2x^2\right).\left(x^3-2x^2\right)'=2\left(x^3-2x^2\right).\left(3x^2-4x\right)$

$=6x^5-8x^4-12x^4+16x^3=6x^5-20x^4+16x^3$

Cách 2 : Khai triển hằng đẳng thức :

Ta có: $y=\left(x^3-2x^2\right)^2=x^6-4x^5+4x^4 \Rightarrow y'=6x^5-20x^4+16x^3$

Chọn A

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x^2+3x+3}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\dfrac{2x^2+10x+9}{(x^2+3x+3)^2}$.

B. $\dfrac{-2x^2-10x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

C. $\dfrac{x^2-2x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

D. $\dfrac{-2x^2-5x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\dfrac{(2x+5)'.(x^2+3x+3)-(2x+5)(x^2+3x+3)'}{\left(x^2+3x+3\right)^2}$

$=\dfrac{2\left(x^2+3x+3\right)-(2x+5).(2x+3)}{\left(x^2+3x+3\right)^2}=\dfrac{2x^2+6x+6-4x^2-6x-10x-15}{\left(x^2+3x+3\right)^2}$

$=\dfrac{-2x^2-10x-9}{\left(x^2+3x+3\right)^2}$.

Chọn B

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\left\{-2\sqrt{2}\right\}$.

B. $\left\{2;\sqrt{2}\right\}$.

C. $\left\{-4\sqrt{2}\right\}$.

D. $\left\{2\sqrt{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Chọn D

Câu 47. Đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+9}{x+3}+\sqrt{4x}$ tại điểm $x=1$ bằng:

A. $-\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{25}{16}$. **C.** $\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{11}{8}$.

Hướng dẫn giải

$$f'\left(x\right)=\frac{-6}{\left(x+3\right)^2}+\frac{2}{\sqrt{4x}}$$

$$f'\left(1\right)=\frac{-6}{\left(1+3\right)^2}+\frac{2}{\sqrt{4.1}}=\frac{5}{8}.$$

Chọn C

Câu 48. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $\dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **C.** $\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **D.**
$\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{\left(x-1\right)'.\sqrt{x^2+1}-\left(x-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\left(x-1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{x^2+1-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Chọn B

Câu 49. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ là:

A. $y'=-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}$.

B. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

D. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)=\dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

Chọn C

Câu 50. Cho hàm số $y=4x-\sqrt{x}$. Nghiệm của phương trình $y'=0$ là

A. $x=\dfrac{1}{8}$.

B. $x=\sqrt{\dfrac{1}{8}}$.

C. $x=\dfrac{1}{64}$.

D. $x=-\dfrac{1}{64}$.

Hướng dẫn giải

$y'=4-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'=0\Leftrightarrow 4-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow 8\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow x=\dfrac{1}{64}$.

Chọn C

CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

A. LÝ THUYẾT

1. Tiếp tuyến tại 1 điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C).

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình là

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0.$$

2. Hệ số góc của tiếp tuyến:

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc là $k = f'(x_0)$

Chú ý:

- ✓ Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ song song với đường thẳng $y = ax + b$ thì $f'(x_0) = a$.
- ✓ Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ thì $f'(x_0).a = -1$.
- ✓ Tiếp tuyếntại $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) tạo với chiều dương của trục hoành 1 góc α thì $f'(x_0) = \tan\alpha$

3. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_1; y_1)$:

Cách 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0). \quad (*)$$

Vì tiếp tuyến đi qua $A(x_1; y_1)$ nên $y_1 = f'(x_0).(x_1 - x_0) + f(x_0)$.

Giải phương trình tìm x_0, thế vào (*) suy ra phương trình tiếp tuyến.

Cách 2: Sử dụng điều kiện tiếp xúc

Gọi phương trình đường thẳng đi qua $A(x_1; y_1)$ có dạng :

$$y = k(x - x_1) + y_1 \qquad (d)$$

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$$ có nghiệm

B. CÁC DẠNG BÀI T ẬP

DẠNG 1: Viết phương trình tiếp tuyến tại 1 điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc độ thì hàm số

Phương pháp:

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x)$
- ✓ Tìm các giá trị $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ f'(x_0) \end{cases}$
- ✓ Viết phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ có dạng : $y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

a. Tại điểm $\mathrm{M}(-1;3)$.

b.Tại điểm có hoành độ bằng 2 .

c. Tại điểm có tung độ bằng 1 .

d.Tại giao điểm (C) với trục tung .

Giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

Ta có: $\mathrm{f}'(x) = 3x^2 + 6x$

a. Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ có phương trình : $y = f'(-1)(x+1)+3$

Ta có: $y'(-1) = -3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -3x+6$

b. Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến

Tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Rightarrow$ $x_0 = 2$ vào đồ thị của (C) ta được $y_0 = 21$.

Thay $x_0 = 2$ vào $f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x_0) = 24$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là : $y = 24x - 27$

c. Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến.

Tại điểm có tung độ bằng 1 $\Rightarrow$ $y_0 = 1$

Thay $y_0 = 1$ vào đồ thị của (C) ta được $x_0^{\,2}(x_0+3) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -3$.

Tương tự câu a , phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$, $y = 9x + 28$

d. Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến.

Tại giao điểm (C) với trục tung $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.Tương tự câu a, phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$

DẠNG 2: Phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc

Phương pháp:

- ✓ Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến.
- ✓ Tính đạo hàm
- ✓ Từ dữ kiện đề bài $\Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(x_0)$

Chú ý :

- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b$ thì $f'(x_0) = a$.
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ thì $f'(x_0).a = -1$.
- Tiếp tuyến tạo với chiều dương của trục hoành 1 góc α thì $f'(x_0) = \tan\alpha$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 2018$.

Giải

Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -x^2 + 2x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k = y'\left(x_0\right) = -x_0^2 + 2x_0$.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 2018$ nên

$$k = -3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 2x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right..$$

● Với $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = -\frac{1}{3}x_0^3 + x_0^2 + 2 = \frac{10}{3}$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3\left(x+1\right) + \frac{10}{3} = -3x + \frac{1}{3}$.

● Với $x_0 = 3$ suy ra $y_0 = -\frac{1}{3}x_0^3 + x_0^2 + 2 = 2$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3\left(x-3\right) + 2 = -3x + 11$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3x + \frac{1}{3}$ hoặc $y = -3x + 11$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{3}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 4y + 2018 = 0$.

Giải

Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = 2x^2 - 6x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k = y'\left(x_0\right) = 2x_0^2 - 6x_0$.

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 4y + 2018 = 0$

$\Rightarrow\ k.\dfrac{1}{4}=-1\Leftrightarrow\left(2x_0^2-6x_0\right)\dfrac{1}{4}=-1\Leftrightarrow 2x_0^2-6x_0=-4\Leftrightarrow 2x_0^2-6x_0+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=2\end{array}\right.$.

● Với $x_0=1$ suy ra $y_0=\dfrac{2}{3}x_0^3-3x_0^2-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{8}{3}$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=-4\left(x-1\right)-\dfrac{8}{3}=-4x+\dfrac{4}{3}$.

● Với $x_0=2$ suy ra $y_0=\dfrac{2}{3}x_0^3-3x_0^2-\dfrac{1}{3}=-7$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y=-4\left(x-2\right)-7=-4x+1$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y=-4x+\dfrac{4}{3}$ hoặc $y=-4x+1$.

Ví dụ 3: Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị $y=x^3-3x^2+2\ (C)$ biết tiếp tuyến cắt trục $Ox,\ Oy$ lần lượt tại $A,\ B$ thỏa mãn: $OB=9OA$.

Giải

Gọi $M\left(x_0;y\left(x_0\right)\right)$là toạ độ tiếp điểm.

Theo bài toán, đường thẳng d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt A,B.

Gọi β là góc tạo bởi giữa d và Ox, do đó d có hệ số góc $k=\pm\tan\beta$

Dễ thấy, tam giác AOB vuông tại O, suy ra $\tan\beta=\dfrac{OB}{OA}=9$

Nói khác hơn đường thẳng d có hệ số góc là ± 9, nghĩa là ta luôn có:
$\left[\begin{array}{l}y'\left(x_0\right)=9\\y'\left(x_0\right)=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x_0^2-6x_0-9=0\\3x_0^2-6x_0+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Leftrightarrow x_0=-1$ hoặc $x_0=3$ vì $x_0^2-2x_0+3>0,\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Với $x_0=-1$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x+7$

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x-25$

Vậy, có 2 tiếp tuyến $y=9x+7$, $y=9x-25$ thỏa đề bài .

DẠNG 3: Tiếp tuyến kẻ từ 1 điểm

Phương pháp:

Cách 1: Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=f'\left(x_0\right).\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$. (*)

Vì tiếp tuyến đi qua $A\left(x_1;y_1\right)$ nên $y_1=f'\left(x_0\right).\left(x_1-x_0\right)+f\left(x_0\right)$.

Giải phương trình tìm x_0, thế vào (*) suy ra phương trình tiếp tuyến.

Cách 2: Sử dụng điều kiện tiếp xúc

Gọi phương trình đường thẳng đi qua $A\left(x_1;y_1\right)$ có dạng :

$y=k\left(x-x_1\right)+y_1\ \left(d\right)$

Để $\left(d\right)$ là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ thì hệ phương trình

$$\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_1\right)+y_1 \\ f'\left(x\right)=k \end{cases}$$ có nghiệm

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(1;3\right)$.

Giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y'=3x^2+6x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến: $k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2+6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến tại M của đồ thị có dạng

$y=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0=\left(3x_0^2+6x_0\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3+3x_0^2-1$.

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(1;3\right)$ nên

$3=\left(3x_0^2+6x_0\right)\left(1-x_0\right)+x_0^3+3x_0^2-1 \Leftrightarrow x_0=1$ hoặc $x_0=-2$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x-6$ hoặc $y=3$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Tìm trên đường thẳng $y=-2$ những điểm mà từ đó kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải

Lấy bất kỳ điểm $M\left(m;-2\right)$ thuộc đường thẳng $y=-2$.

Đường thẳng d đi qua $M\left(m;-2\right)$ với hệ số góc k có phương trình $y=k\left(x-m\right)-2$.

Để d tiếp xúc với đồ thị khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} x^3-3x^2+2=k\left(x-m\right)-2 & (1) \\ 3x^2-6x=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay $k=3x^2-6x$ từ (2) vào (1), ta được

$$x^3-3x^2+2=\left(3x^2-6x\right)\left(x-m\right)-2 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[2x^2-\left(3m-1\right)x+2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ g\left(x\right)=2x^2-\left(3m-1\right)x+2=0 \end{array}\right. .$$

Với $x=2$, suy ra $k=0$. Phương trình tiếp tuyến $y=-2$.

Do không có tiếp tuyến nào của đồ thị vuông góc với tiếp tuyến $y=-2$ nên để từ $M\left(m;-2\right)$ kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau đến đồ thị thì $g\left(x\right)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và các tiếp tuyến tại các hoành độ x_1, x_2 vuông góc với nhau.

- $g\left(x\right)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=\left(3m-1\right)^2-16>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{5}{3} \\ m<-1 \end{array}\right.$.
- Theo định lý Vi-et, ta có $x_1+x_2=\frac{3m-1}{2}$ và $x_1x_2=1$. Để tiếp tuyến tại các hoành độ x_1, x_2 vuông góc với nhau

$\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow (3x_1^2-6x_1)(3x_2^2-6x_2)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_1x_2)^2-18x_1x_2(x_1+x_2)+36x_1x_2=-1$

$\Leftrightarrow 9x_1x_2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=-1 \Leftrightarrow 9[1-(3m-1)+4]=-1$

$\Leftrightarrow 54-27m=-1$

$\Leftrightarrow m=\frac{55}{27}$ (thỏa mãn).

Vậy $M\left(\frac{55}{27};-2\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

C . BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với trục hoành là:

A. $y=2x-4$. **B.** $y=3x+1$. **C.** $y=-2x+4$. **D.** $y=2x$.

Câu 2: Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$. Tìm tọa độ các điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó với (C) vuông góc với đường thẳng có phương trình $y=x+4$.

A. $(1+\sqrt{3};5+3\sqrt{3}),(1-\sqrt{3};5-3\sqrt{3})$. **B.** $(2;\,12)$.

C. $(0;\,0)$. **D.** $(-2;\,0)$.

Câu 3: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2-3x}{x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành bằng:

A. 9. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** -9. **D.** $-\frac{1}{9}$.

Câu 4: Biết tiếp tuyến (d) của hàm số $y=x^3-2x+2$ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Phương trình (d) là:

A. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18-5\sqrt{3}}{9}, y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

B. $y = x, y = x + 4.$

C. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}, y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}.$

D. $y = x - 2, y = x + 4.$

Câu 5: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

A. $y = 10x + 4.$ **B.** $y = 10x - 5.$ **C.** $y = 2x - 4.$ **D.** $y = 2x - 5.$

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9,$ có phương trình là:

A. $y - 16 = -9(x + 3).$ **B.** $y = -9(x + 3).$

C. $y - 16 = -9(x - 3).$ **D.** $y + 16 = -9(x + 3).$

Câu 7: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ tại giao điểm với trục tung bằng:

A. $-2.$ **B.** $2.$ **C.** $1.$ **D.** $-1.$

Câu 8: Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại các giao điểm của (H) với hai trục toạ độ là:

A. $y = x - 1.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = x + 1 \end{array}\right.$. **C.** $y = -x + 1.$ **D.** $y = x + 1.$

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y = 9x + 10$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 10: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y=\dfrac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành:

A. $y=\dfrac{1}{3}(x-1).$ **B.** $y=3x.$

C. $y=x-3.$ **D.** $y=3(x-1).$

Câu 11: Cho hàm số $y=x^2-6x+5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $x=-3.$ **B.** $y=-4.$ **C.** $y=4.$ **D.** $x=3.$

Câu 12: Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 13: Gọi (P) là đồ thị hàm số $y=x^2-x+3$. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại giao điểm của (P) và trục tung là

A. $y=-x+3.$ **B.** $y=-x-3.$

C. $y=x-3$. **D.** $y=-3x+1$.

Câu 14: Cho hàm số $y=2-\dfrac{4}{x}$ có đồ thị (H). Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y=-x+2$ và tiếp xúc với (H) thì phương trình của Δ là

A. $y=x+4.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=x+4 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=x+6 \end{array}\right.$. **D.** Không tồn tại.

Câu 15: Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3+3x^2-8x+1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y=x+2017$?

A. $y=x+2018$. **B.** $y=x+4$.

C. $y = x - 4$; $y = x + 28$.
D. $y = x - 2018$.

Câu 16: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình là:

A. $y = -x + 2$.
B. $y = x + 2$.
C. $y = x - 1$.
D. $y = -x - 3$

Câu 17: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C), tiếp tuyến với (C) nhận điểm $M_0\left(\dfrac{3}{2}; y_0\right)$ làm tiếp điểm có phương trình là:

A. $y = \dfrac{9}{2}x$.
B. $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{27}{4}$.
C. $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{23}{4}$.
D. $y = \dfrac{9x}{2} - \dfrac{31}{4}$.

Câu 18: Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là

A. $x = 1$ và $x = -1$.
B. $x = -3$ và $x = 3$.
C. $x = 1$ và $x = 0$.
D. $x = 2$ và $x = -1$.

Câu 19: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có tung độ tiếp điểm bằng 2 là:

A. $y = 8x - 6, y = -8x - 6.$
B. $y = 8x - 6, y = -8x + 6.$
C. $y = 8x - 8, y = -8x + 8.$
D. $y = 40x - 57.$

Câu 20: Cho đồ thị $(H): y = \dfrac{x+2}{x-1}$ và điểm $A \in (H)$ có tung độ $y = 4$. Hãy lập phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm A.

A. $y = x - 2$.
B. $y = -3x - 11$.
C. $y = 3x + 11$.
D. $y = -3x + 10$.

Câu 21: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có phương trình là:

A. $y=x-1$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=x$. **D.** $y=-x$.

Câu 22: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=-9x$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 23: Trên đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

A. $(2;1)$. **B.** $\left(4;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{4};-4\right)$.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1;0)$ là:

A. $y=\dfrac{3}{4}x$ **B.** $y=\dfrac{3}{4}(x+1)$ **C.** $y=3(x+1)$ **D.** $y=3x+1$

Câu 25: Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+3x+5$, mà tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau là

A. 1 **B.** 0 **C.** 2. **D.** Vô số

Câu 26: Qua điểm $A(0;2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2+2$

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 27: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) và có hệ số góc nhỏ nhất:

A. $y=-3x+3$ **B.** $y=0$

C. $y=-5x+10$ **D.** $y=-3x-3$

Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có đồ thị là (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x=2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C):

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 29: Đường thẳng $y=3x+m$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+2$ khi m bằng

A. 1 hoặc -1. **B.** 4 hoặc 0. **C.** 2 hoặc -2. **D.** 3 hoặc -3.

Câu 30: Định m để đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+1$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y=5$?

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Câu 31: Phương trình tiếp tuyến của (C): $y=x^3$ biết nó đi qua điểm $M(2;0)$ là:

A. $y=27x\pm 54$. **B.** $y=27x-9 \vee y=27x-2$.

C. $y=27x\pm 27$. **D.** $y=0 \vee y=27x-54$.

Câu 32: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là:

A. $24m/s^2$. **B.** $17m/s^2$. **C.** $14m/s^2$. **D.** $12m/s^2$.

Câu 33: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2-9t+2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$ hoặc $t=2$.

B. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t=2$ là $v=18\ m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3$ là $a=12\ m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$.

Câu 34: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m / s^2$.

B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m / s^2$.

C. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m / s$.

D. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m / s$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $y=\frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với trục hoành là:

A. $y=2x-4$. **B.** $y=3x+1$. **C.** $y=-2x+4$. **D.** $y=2x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giao điểm của (H) với trục hoành là $A(2;0)$. Ta có: $y'=\frac{-2}{(x-3)^2}\Rightarrow y'(2)=-2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-2(x-2)$ hay $y=-2x+4$.

Câu 2: : Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$. Tìm tọa độ các điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó với (C) vuông góc với đường thẳng có phương trình $y=x+4$.

A. $(1+\sqrt{3};5+3\sqrt{3}),(1-\sqrt{3};5-3\sqrt{3})$. **B.** $(2;12)$.

C. $(0;0)$. **D.** $(-2;0)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm: $y'=\frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}$.

Giả sử x_o là hoành độ điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Rightarrow y'(x_o)=-1$

$\Rightarrow \dfrac{x_o^2-2x_o-5}{\left(x_o-1\right)^2}=-1 \Rightarrow x_o^2-2x_o-5=-\left(x_o-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 2x_o^2-4x_o-4=0 \Leftrightarrow x_o^2-2x_o-2=0$

$\Leftrightarrow x_o=1\pm\sqrt{3} \Rightarrow y=5\pm 3\sqrt{3}.$

Câu 3: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành bằng:

A. 9 . **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** -9. **D.** $-\dfrac{1}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $A\left(\dfrac{2}{3};\,0\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'\left(\dfrac{2}{3}\right)=9$.

Câu 4: Biết tiếp tuyến (d) của hàm số $y=x^3-2x+2$ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Phương trình (d) là:

A. $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{18-5\sqrt{3}}{9}$, $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

B. $y=x, y=x+4$.

C. $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{18-5\sqrt{3}}{9}$, $y=-x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

D. $y = x - 2, y = x + 4.$

Hướng dẫn giải:

Chọn **C.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2.$

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $\Delta : x = y$.

$\Rightarrow (d)$ có hệ số góc là -1.

$y'(x_o) = -1 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow x_o = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$(d): y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9},\ y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}.$

Câu 5: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

A. $y = 10x + 4.$ **B.** $y = 10x - 5.$ **C.** $y = 2x - 4.$ **D.** $y = 2x - 5.$

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4x + 3.$

$y'(-1) = 10;\ y(-1) = -6$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $(d): y = 10(x + 1) - 6 = 10x + 4.$

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$ có hệ số góc $k=-9,$ có phương trình là:

A. $y-16=-9(x+3).$ **B.** $y=-9(x+3).$

C. $y-16=-9(x-3).$ **D.** $y+16=-9(x+3).$

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}.$

Đạo hàm: $y'=x^2+6x.$

$k=-9\Leftrightarrow y'\left(x_o\right)=-9\Leftrightarrow x_o^2+6x_o=-9\Leftrightarrow\left(x_o+3\right)^2=0\Leftrightarrow x_o=-3\Rightarrow y_o=16$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left(d\right):y=-9\left(x+3\right)+16\Leftrightarrow y-16=-9\left(x+3\right).$

Câu 7: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ tại giao điểm với trục tung bằng:

A. $-2.$ **B.** $2.$ **C.** $1.$ **D.** $-1.$

Hướng dẫn giải:

Chọn **B.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}.$

Đạo hàm: $y'=\frac{2}{\left(x+1\right)^2}.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có $x_o=0\Rightarrow y'_o=2.$

Câu 8: Gọi $\left(H\right)$ là đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x}.$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(H\right)$ tại các giao điểm của $\left(H\right)$ với hai trục toạ độ là:

A. $y = x - 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = x + 1 \end{array}\right.$. **C.** $y = -x + 1$. **D.** $y = x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{1}{x^2}$.

(H) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ và không cắt trục tung.

$y'(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $d: y = x - 1$.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y = 9x + 10$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn **C.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$.

$k = 9 \Rightarrow 3x_o^2 - 6x_o - 9 = 0 \Leftrightarrow x_o^2 - 2x_o - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 3 \\ x_o = -1 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành:

A. $y=\frac{1}{3}(x-1)$. **B.** $y=3x$.

C. $y=x-3$. **D.** $y=3(x-1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$.

Đạo hàm: $y'=\frac{3}{\left(x+2\right)^2}$.

(H) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x_o=1\Rightarrow y'\left(1\right)=\frac{1}{3};\ y\left(1\right)=0$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $d:y=\frac{1}{3}\left(x-1\right)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^2-6x+5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $x=-3$. **B.** $y=-4$. **C.** $y=4$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn **B.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=2x-6$.

Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên ta có:
$y'\left(x_o\right)=0\Rightarrow 2x_o-6=0\Leftrightarrow x_o=3\Rightarrow y_o=-4\Rightarrow d:y=-4$.

Câu 12: Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-6x=3\left(x-1\right)^2-3\geq -3$.

Vậy trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số đã cho, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng -3.

Câu 13: Gọi $\left(\mathrm{P}\right)$ là đồ thị hàm số $y=x^2-x+3$. Phương trình tiếp tuyến với $\left(\mathrm{P}\right)$ tại giao điểm của $\left(\mathrm{P}\right)$ và trục tung là

A. $y=-x+3$.

B. $y=-x-3$.

C. $y=x-3$.

D. $y=-3x+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Giao điểm của $\left(\mathrm{P}\right)$ và trục tung là $M\left(0;3\right)$.

Đạo hàm: $y'=2x-1\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại $x=0$ là -1.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(0;3\right)$ là $y=-x+3$.

Câu 14: Cho hàm số $y=2-\dfrac{4}{x}$ có đồ thị $\left(H\right)$. Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d:\ y=-x+2$ và tiếp xúc với $\left(H\right)$ thì phương trình của Δ là

A. $y=x+4$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=x+4 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=x+6 \end{array}\right.$.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{4}{x^2}$

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d:\ y=-x+2$ nên Δ có hệ số góc bằng 1. Ta có phương trình $1=\dfrac{4}{x^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Tại $M(2;0)$. Phương trình tiếp tuyến là $y=x-2$.

Tại $N(-2;4)$. Phương trình tiếp tuyến là $y=x+6$.

Câu 15: Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3+3x^2-8x+1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y=x+2017$?

A. $y=x+2018$. **B.** $y=x+4$.

C. $y=x-4$; $y=x+28$. **D.** $y=x-2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2+6x-8$.

Tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng $\Delta: y=x+2017$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là 1.

Ta có phương trình $1=3x^2+6x-8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Tại $M(1;-3)$. Phương trình tiếp tuyến là $y=x-4$.

Tại $N\left(-3;25\right)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 28$.

Câu 16: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình là:

A. $y = -x + 2$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = x - 1$. **D.** $y = -x - 3$

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Đạo hàm: $y' = -\dfrac{4}{\left(x-1\right)^2}$.

Tiếp tuyến tại $M\left(-1;-2\right)$ có hệ số góc là $k = -1$.

Phương trình của tiếp tuyến là $y = -x - 3$

Câu 17: Cho hàm số $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 + 1$ có đồ thị (C), tiếp tuyến với (C) nhận điểm $M_0\left(\dfrac{3}{2}; y_0\right)$ làm tiếp điểm có phương trình là:

A. $y = \dfrac{9}{2}x$. **B.** $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{27}{4}$.

C. $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{23}{4}$. **D.** $y = \dfrac{9x}{2} - \dfrac{31}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $x_0 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y_0 = 1$.

Đạo hàm của hàm số $y' = 6x^2 - 6x$.

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0\left(\frac{3}{2};y_0\right)$ là $k=\frac{9}{2}$.

Phương trình của tiếp tuyến là $y=\frac{9}{2}x-\frac{23}{4}$

Câu 18: Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ là

A. $x=1$ và $x=-1$.
B. $x=-3$ và $x=3$.
C. $x=1$ và $x=0$.
D. $x=2$ và $x=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-3$.

Tiếp tuyến song song với trục hoành có hệ số góc bằng 0 nên có phương trình $0=3x^2-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Câu 19: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-1$ tại điểm có tung độ tiếp điểm bằng 2 là:

A. $y=8x-6, y=-8x-6.$
B. $y=8x-6, y=-8x+6.$
C. $y=8x-8, y=-8x+8.$
D. $y=40x-57.$

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=4x^3+4x$.

Tung độ tiếp điểm bằng 2 nên $2 = x^4 + 2x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Tại $M\left(1;2\right)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 8x - 6$.

Tại $N\left(-1;2\right)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -8x - 6$.

Câu 20: Cho đồ thị $(H): y = \dfrac{x+2}{x-1}$ và điểm $A \in (H)$ có tung độ $y = 4$. Hãy lập phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm A.

A. $y = x - 2$.
B. $y = -3x - 11$.
C. $y = 3x + 11$.
D. $y = -3x + 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$.

Đạo hàm: $y' = -\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2}$.

Tung độ của tiếp tuyến là $y = 4$ nên $4 = \dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow x = 2$.

Tại $M\left(2;4\right)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 10$.

Câu 21: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có phương trình là:

A. $y = x - 1$.
B. $y = x + 1$.
C. $y = x$.
D. $y = -x$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

Ta có: $y' = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$.

Giao điểm M của đồ thị với trục tung : $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là : $k = y'(0) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là : $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = x - 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -9x$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = -9x$ suy ra $y'(x_0) = -9$

$\Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -9x - 7$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -9x + 25$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 23: Trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

A. $(2;1)$. **B.** $\left(4;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{4};-4\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}.(x - x_0) + \dfrac{1}{x_0 - 1}$ (Δ).

Giao với trục hoành: $(\Delta) \cap Ox = A(2x_0 - 1; 0)$.

Giao với trục tung: $(\Delta) \cap Oy = B\left(0; \dfrac{2x_0 - 1}{(x_0-1)^2}\right)$

$S_{OAB} = \dfrac{1}{2} OA.OB \Leftrightarrow 4 = \left(\dfrac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)^2 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{3}{4}$. Vậy $M\left(\dfrac{3}{4}; -4\right)$.

Câu 24: **Câu 24:** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1;0)$ là:

A. $y = \dfrac{3}{4}x$ **B.** $y = \dfrac{3}{4}(x+1)$ **C.** $y = 3(x+1)$ **D.** $y = 3x + 1$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi d là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc k,

Vì $A(-1;0) \in d$ suy ra $d: \quad y = k(x+1)$

d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = k(x+1) & (1) \\ \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1) ta được $x = 1 \Rightarrow k = y'(1) = \dfrac{3}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1;0)$ là: $y=\frac{3}{4}(x+1)$

Câu 25: Số cặp điểm $A,\ B$ trên đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+3x+5$, mà tiếp tuyến tại $A,\ B$ vuông góc với nhau là

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 . **D.** Vô số

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2+6x+3$. Gọi $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$

Tiếp tuyến tại A, B với đồ thị hàm số lần lượt là:

$d_1: y=(3x_A^2+6x_A+3)(x-x_A)+y_A$
$d_2: y=(3x_B^2+6x_B+3)(x-x_B)+y_B$

Theo giả thiết $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2=-1$

$\Leftrightarrow (3x_A^2+6x_A+3).(3x_B^2+6x_B+3)=-1 \Leftrightarrow 9(x_A^2+2x_A+1).(x_B^2+2x_B+1)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_A+1)^2.(x_B+1)^2=-1$ (vô lý)

Suy ra không tồn tại hai điểm $A,\ B$

Câu 26: Qua điểm $A(0;2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2+2$

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho.

Vì $A(0;2)\in d$ nên phương trình của d có dạng: $y=kx+2$

Vì d tiếp xúc với đồ thị (C) nên hệ $\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 2 = kx + 2 & (1) \\ 4x^3 - 4x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) và (1) ta suy ra được $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right.$

Chứng tỏ từ A có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

Câu 27: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) và có hệ số góc nhỏ nhất:

A. $y = -3x + 3$ **B.** $y = 0$

C. $y = -5x + 10$ **D.** $y = -3x - 3$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $M(x_0; x_0^3 - 3x_0^2 + 2)$ là tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C)

$y' = 3x_0^2 - 6x_0$

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y = k(x - x_0) + y_0$

Mà $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) - 3$

$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)^2 - 3 \geq -3$

Hệ số góc nhỏ nhất khi $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 0$; $k = -3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1;0)$ có hệ số góc nhỏ nhất là: $y = -3x + 3$

Câu 28: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C):

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét đường thẳng kẻ từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x=2$ có dạng $\Delta: y=k(x-2)=kx\text{-}2k$.

Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-6x^2+9x\text{-}1=kx-2k \\ 3x^2-12x+9=k \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-12x^2+24x\text{-}17=0 \\ 3x^2-12x+9=k \end{cases}$

Phương trình bậc ba có duy nhất một nghiệm tương ứng cho ta một giá trị k. Vậy có một tiếp tuyến.

Dễ thấy kẻ từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x=2$ có dạng $y=a$ song song với trục Ox cũng chỉ kẻ được một tiếp tuyến.

Câu 29: Đường thẳng $y=3x+m$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+2$ khi m bằng

A. 1 hoặc -1. **B.** 4 hoặc 0.

C. 2 hoặc -2. **D.** 3 hoặc -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng $y=3x+m$ và đồ thị hàm số $y=x^3+2$ tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=x^3-3x+2 \\ x=\pm1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Câu 30: Định m để đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+1$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y=5$?

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng $y = x^3 - mx^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = 5$ tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - mx^2 + 1 = 5 \ (1) \\ 3x^2 - 2mx = 0 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm.

. $(2) \Leftrightarrow x(3x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2m}{3} \end{array}\right.$.

+ Với $x = 0$ thay vào (1) không thỏa mãn.

+ Với $x = \dfrac{2m}{3}$ thay vào (1) ta có: $m^3 = -27 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 31: Phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^3$ biết nó đi qua điểm $M(2;0)$ là:

A. $y = 27x \pm 54$. **B.** $y = 27x - 9 \vee y = 27x - 2$.

C. $y = 27x \pm 27$. **D.** $y = 0 \vee y = 27x - 54$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ $y' = 3x^2$.

+ Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. PTTT của (C) tại $A(x_0; y_0)$ là:

$y = 3x_0^2\left(x - x_0\right) + x_0^3 \quad (d)$.

+ Vì tiếp tuyến (d) đi qua $M(2;0)$ nên ta có phương trình:

$3x_0^2\left(2 - x_0\right) + x_0^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$.

+ Với $x_0 = 0$ thay vào (d) ta có tiếp tuyến $y = 0$.

+ Với $x_0 = 3$ thay vào (d) ta có tiếp tuyến $y = 27x - 54$.

Câu 32: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24m/s^2$. **B.** $17m/s^2$. **C.** $14m/s^2$. **D.** $12m/s^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$s' = \left(t^3 - 3t^2 + 5t + 2\right)' = 3t^2 - 6t + 5$$
$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

Đáp án **D**

Câu 33: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 2$.

B. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18\ m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12\ m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$s' = \left(t^3 - 3t^2 + 5t + 2\right)' = 3t^2 - 6t + 5$$
$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

Câu 34: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

C. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s$.

D. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$s' = 3t^2 - 6t \Rightarrow s'' = 6t - 6$

$s''(4) = 18$

CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

BÀI 4: ĐẠO HÀM LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Giới hạn lượng giác

Công thức: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Chú ý: Nếu hàm số $u = u(x)$ thỏa mãn điều kiện: $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$

2. Đạo hàm lượng giác

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính đạo hàm bằng công thức

Phương pháp: Áp dụng bảng đạo hàm lượng giác và các tính chất của đạo hàm

Đạo hàm của các hàm thường gặp

Đạo hàm	**Hàm hợp**
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Tính chất của đạo hàm

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad$ $(u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + u.v'$ hệ quả $(k.u)' = k.u'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$ hệ quả $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm

a. $y = \sin^3(2x+1)$. $\quad$ b. $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$. $\quad$ c. $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$

d. $y = \sqrt{\sin x + 2x}$. $\quad$ e. $y = \sin\sqrt{2+x^2}$. $\quad$ f. $y = \left(2+\sin^2 2x\right)^3$.

Giải

a) Ta có $y' = 3\left[\sin(2x+1)\right]' \sin^2(2x+1)$

$= 3\left[2\cos(2x+1)\right]\sin^2(2x+1)$

$= 6\cos(2x+1)\sin^2(2x+1)$

b) Ta có $y' = 2.\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'.\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = 2.\left[\frac{(\sin x)'(1+\cos x) - (\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}\right].\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$= 2.\left[\frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right].\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{2(2+\cos x)\sin x}{(1+\cos x)^3}$,

c) Ta có $y' = 2.2.(\sin 4x)' \sin 4x - 3.3.(\cos 5x)'.\cos^2 5x$

$= 2.2.(4.\cos 4x)\sin 4x - 3.3.(-5.\sin 5x).\cos^2 5x$

$= 8\sin 8x + 45\sin 5x\cos^2 5x$.

d) Ta có $y'=\dfrac{(\sin x+2x)'}{2\sqrt{\sin x+2x}}=\dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$.

e) Ta có $y'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'.\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}$.

f) Ta có $y'=3.\left(2+\sin^2 2x\right)'.\left(2+\sin^2 2x\right)^2=3.\left[0+2.(\sin 2x)'.\sin 2x\right].\left(2+\sin^2 2x\right)^2$

$=3.\left[0+2.2.\cos 2x.\sin 2x\right].\left(2+\sin^2 2x\right)^2=6\sin 4x\left(2+\sin^2 2x\right)^2$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm

a) $y=\sin\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$. b) $y=\cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

Giải

a) Ta có $y'=\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)'.\cos\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$

$=\left[\left(\cos^2 x\right)'.\tan^2 x+\cos^2 x.\left(\tan^2 x\right)'\right].\cos\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$

$=\left[2.(\cos x)'.\cos x.\tan^2 x+\cos^2 x.2.(\tan x)'.\tan x\right].\cos\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$

$=\left[2.(-\sin x).\cos x.\tan^2 x+\cos^2 x.2.\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right).\tan x\right].\cos\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$

$=\left(-\sin 2x.\tan^2 x+2\tan x\right).\cos\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$.

b) Ta có $y'=2.\left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]'.\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=-2.\left[\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'.\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right].\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$=-\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)'.\sin 2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=-\left[0-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)'}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\right].\sin 2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin 2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

Dạng 2: Tính đạo hàm tại 1 điểm

Phương pháp: Tính đạo hàm sau đó thay giá trị tại điểm đó vào đạo hàm

Ví dụ 3 :

a) Tính $f'(3)$ biết $f(x)=\dfrac{2}{\cos(\pi x)}$

b) Tính $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ biết $y=\cos 3x.\sin 2x$.

c) Tính $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ biết $y=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}$

d) Tính $f'\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right)$ biết $f(x)=\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$

Giải

a) $f'(x)=\dfrac{2}{\cos(\pi x)}=2.\left(\cos(\pi x)\right)'.\dfrac{-1}{\cos^2(\pi x)}=2.\pi\dfrac{\sin(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}$.

$$\Rightarrow f'(3)=2\pi.\frac{\sin 3\pi}{\cos^2 3\pi}=0.$$

b) $y'=(\cos 3x)'\sin 2x+\cos 3x(\sin 2x)'=-3\sin 3x.\sin 2x+2\cos 3x.\cos 2x$.

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3\sin 3\frac{\pi}{3}.\sin 2\frac{\pi}{3}+2\cos 3\frac{\pi}{3}.\cos 2\frac{\pi}{3}=1$$

c) $y'=\dfrac{(\cos 2x)'.(1-\sin x)-\cos 2x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{-2\sin 2x(1-\sin x)+\cos 2x.\cos x}{(1-\sin x)^2}$.

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-2.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=-\sqrt{3}$$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)$.

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}}\left(\cos\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}-\sin\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\right)=\frac{1}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

Dạng 3: Giải phương trình hoạc bất phương trình đạo hàm

Phương pháp: Sử dụng các công thức đạo hàm và cách giải phương trình lượng giác cơ bản

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=1-\sin(\pi+x)+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$. Giải phương trình $f'(x)=0$.

Giải

Ta có $f'(x)=0-\cos(\pi+x)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cos x+\cos\frac{x}{2}$.

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x+\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=-1$ hoặc $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

- $\cos\frac{x}{2}=-1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.
- $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x=2\pi+k4\pi$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 5: Giải phương trình $f'(x)=g(x)$ với $f(x)=\sin^3 2x$ và $g(x)=4\cos 2x-5\sin 4x$.

Giải

Ta có $f'(x)=3.(\sin 2x)'.\sin^2 2x=6\cos 2x\sin^2 2x$.

Phương trình $f'(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow 6\cos 2x\sin^2 2x=4\cos 2x-5\sin 4x \Leftrightarrow 2\cos 2x\left(3\sin^2 x-2+5\sin 2x\right)=0$.

- $\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.
- $3\sin^2 x+5\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-2\\ \sin x=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi\\ x=\pi-\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi\end{array}\right.$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình $f'(x) = g(x)$ có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ x = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi; \qquad x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dang 4: Giới hạn lượng giác

Phương pháp :

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\tan u(x)}{u(x)} = 1$.

Ví dụ 6 : Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{3x}{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2} = \frac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2}$.

b) Ta có: $\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx} = \frac{2\sin^2\frac{mx}{2}+2\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}+2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}$

$$= \frac{m}{n}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}=\frac{m}{n}.$$

c) Ta có: $\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\dfrac{1-\cos x+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}=3$$

d) Ta có: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}x(\dfrac{\sin x}{x})^2.\dfrac{3}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=0$.

e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{-2x\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}(\dfrac{5}{2}.\dfrac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}).\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos\frac{7x}{2}}=\dfrac{5}{2}$.

f) Ta có: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{1-\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{2\sin^2 x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^2.(\frac{x}{\sin x})^2(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})=6.$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Hàm số $y=\sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\dfrac{1+\tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{-(1+\tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1+\cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. **D.** $y'=\dfrac{-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y=3\sin 2x+\cos 3x$ là:

A. $y'=3\cos 2x-\sin 3x$. **B.** $y'=3\cos 2x+\sin 3x$.

C. $y'=6\cos 2x-3\sin 3x$. **D.** $y'=-6\cos 2x+3\sin 3x$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ là:

A. $y'=\dfrac{-\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$.

C. $y'=\dfrac{-2-2\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Câu 4: Hàm số $y=2\sqrt{\sin x}-2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$. **D.** $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 5: Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm là:

A. $y'=-\tan x$. **B.** $y'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $y'=1+\cot^2 x$.

Câu 6: Hàm số $y=x\tan 2x$ ó đạo hàm là:

A. $\tan 2x+\dfrac{2x}{\cos^2 x}$. **B.** $\dfrac{2x}{\cos^2 2x}$.

C. $\tan 2x+\dfrac{2x}{\cos^2 2x}$. **D.** $\tan 2x+\dfrac{x}{\cos^2 2x}$.

Câu 7: Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm là:

A. $y'=-\sin x$. **B.** $y'=\cos x$.

C. $y'=\dfrac{1}{\cos x}$. **D.** $y'=-\cos x$.

Câu 8: Hàm số $y=-\frac{3}{2}\sin 7x$ có đạo hàm là:

A. $-\frac{21}{2}\cos x.$ **B.** $-\frac{21}{2}\cos 7x.$ **C.** $\frac{21}{2}\cos 7x.$ **D.** $\frac{21}{2}\cos x.$

Câu 9: Hàm số $y=\frac{\sin x}{x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\frac{x\sin x-\cos x}{x^2}.$ **B.** $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$

C. $y'=\frac{x\cos x+\sin x}{x^2}.$ **D.** $y'=\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}.$

Câu 10: Đạo hàm của $y=\sqrt{\cot x}$ là :

A. $\frac{-1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}.$ **B.** $\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}.$

C. $\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}.$ **D.** $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cot x}}.$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $1.$ **B.** $\frac{1}{2}.$ **C.** $0.$ **D.** Không tồn tại.

Câu 12: Hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ có đạo hàm là:

A. $3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right).$ **B.** $-3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right).$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right).$ **D.** $-3\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right).$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\cot x$. Giá trị đúng của $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $\frac{8}{9}.$ **B.** $-\frac{9}{8}.$ **C.** $\frac{9}{8}.$ **D.** $-\frac{8}{9}.$

Câu 14: Cho hàm số $y=\sin\sqrt{2+x^2}$. Đạo hàm y' của hàm số là

A. $\frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}.$ **B.** $-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}.$

C. $\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}.$ **D.** $\frac{(x+1)}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}.$

Câu 15: Hàm số $y=\tan x-\cot x$ có đạo hàm là:

A. $y'=\frac{1}{\sin^2 2x}.$ **B.** $y'=\frac{4}{\cos^2 2x}.$

C. $y' = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$.

Câu 16: Đạo hàm của $y = \tan 7x$ bằng:

A. $\dfrac{7}{\cos^2 7x}$. **B.** $-\dfrac{7}{\cos^2 7x}$. **C.** $-\dfrac{7}{\sin^2 7x}$. **D.** $\dfrac{7x}{\cos^2 7x}$.

Câu 17: Hàm số $y = \dfrac{1}{2}\cot x^2$ có đạo hàm là:

A. $\dfrac{-x}{2\sin x^2}$. **B.** $\dfrac{x}{\sin^2 x^2}$. **C.** $\dfrac{-x}{\sin x^2}$. **D.** $\dfrac{-x}{\sin^2 x^2}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$. Hãy chọn khẳng định **ĐÚNG.**

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. **B.** $f'(x) = \dfrac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos 2x}}$.

C. $3y.y' + 2\sin 2x = 0$. **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{2}\right)$. Khi đó phương trình $y' = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{3} - k\pi$.

C. $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 20: Đạo hàm của $y = \sqrt{\cos x}$ là

A. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}$. **B.** $\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. **C.** $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. **D.** $\dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 21: Hàm số $y = x^2.\cos x$ có đạo hàm là

A. $y' = 2x\cos x - x^2\sin x$. **B.** $y' = 2x\cos x + x^2\sin x$.

C. $y' = 2x\sin x + x^2\cos x$. **D.** $y' = 2x\sin x - x^2\cos x$.

Câu 22: Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x.\cos x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ là

A. $y' = 2\sin 2x.\cos x - \sin x.\sin^2 2x - 2\sqrt{x}$.

B. $y' = 2\sin 2x.\cos x - \sin x.\sin^2 2x - 2\sqrt{x}$.

C. $y' = 2\sin 4x.\cos x + \sin x.\sin^2 2x - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2\sin 4x.\cos x - \sin x.\sin^2 2x - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 x - \cot^2 x$ là

A. $y' = 2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}\cdot$

B. $y' = 2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}\cdot$

C. $y' = 2\dfrac{\tan x}{\sin^2 x} + 2\dfrac{\cot x}{\cos^2 x}\cdot$

D. $y' = 2\tan x - 2\cot x.$

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x)$ bằng

A. $\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$

B. $-\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$

C. $\sin(\tan x)$.

D. $-\sin(\tan x)$.

Câu 25: Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm là

A. $y' = -\sin x$. **B.** $y' = -\cos x$. **C.** $y''' = -72x + 24$ **D.** $y' = \sin x$.

Câu 26: Đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 2x + \cos 2x$ là

A. $4\cos 2x + 2\sin 2x$.

B. $2\cos 2x - 2\sin 2x$.

C. $4\cos 2x - 2\sin 2x$.

D. $-4\cos 2x - 2\sin 2x$.

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ là y' bằng

A. $-2\sin 2x$.

B. $-\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

C. $2\sin 2x$.

D. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$. Biểu thức $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. -3. **B.** $\dfrac{8}{3}\cdot$ **C.** 3. **D.** $-\dfrac{8}{3}\cdot$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = \sin^3 5x.\cos^2\dfrac{x}{3}$. Giá trị đúng của $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\cdot$ **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot$ **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot$ **D.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Câu 30: Đạo hàm của $y = \sin^2 4x$ là

A. $2\sin 8x$. **B.** $8\sin 8x$. **C.** $\sin 8x$. **D.** $4\sin 8x$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Giá trị $f'(0)$ bằng

A. $-\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** -3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + 2\sin x}$. Chọn kết quả **SAI**

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{5}{4}$.
B. $f'(0)=-2$.
C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}$.
D. $f'(\pi)=-2$.

Câu 33: Hàm số $y=2\cos x^2$ có đạo hàm là

A. $-2\sin x^2$. **B.** $-4x\cos x^2$. **C.** $-2x\sin x^2$. **D.** $-4x\sin x^2$.

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$ là

A. $\frac{3\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}$. **B.** $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. **C.** $-\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. **D.** $\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=\frac{\sqrt{2}}{\cos 3x}$. Khi đó $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 36: Hàm số $y=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$ có đạo hàm là:

A. $x.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.
B. $\frac{1}{2}x^2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.
C. $\frac{1}{2}x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.
D. $\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Câu 37: Cho hàm số $y=\cos(x)$. Khi đó $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ có giá trị nào sau đây?

A. 1 **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** 0

Câu 38: Cho hàm số $y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$. Khi đó phương trình $y'=0$ có nghiệm là:

A. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$.
B. $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$.
C. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.
D. $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } x\ge 0\\ \sin(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tìm khẳng định **SAI**?

A. Hàm số f không có đạo hàm tại $x_0=0$.
B. Hàm số f không liên tục tại $x_0=0$.
C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

D. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\sin(\pi\sin x)$. Giá trị $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **D.** 0.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)-\cos^2 x$ với $f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong bốn biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm $f\left(x\right)$ thỏa mãn $y'=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$. **C.** $x-\sin 2x$. **D.** $x+\sin 2x$.

Câu 42: Đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{2}{\tan\left(1-2x\right)}$ bằng:

A. $\dfrac{4x}{\sin^2\left(1-2x\right)}$ **B.** $\dfrac{-4}{\sin\left(1-2x\right)}$

C. $\dfrac{-4x}{\sin^2\left(1-2x\right)}$ **D.** $\dfrac{-4}{\sin^2\left(1-2x\right)}$

Câu 43: Chọn mệnh đề **ĐÚNG** trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

B. Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

C. Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

D. Hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

Câu 44: Cho hàm số $y=\sqrt{x\tan x}$. Xét hai đẳng thức sau:

(I) $y'=\dfrac{x\left(\tan^2 x+\tan x+1\right)}{2\sqrt{x\tan x}}$ (II) $y'=\dfrac{x\tan^2 x+\tan x+1}{2\sqrt{x\tan x}}$

Đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ $\left(\text{II}\right)$. **B.** Chỉ $\left(\text{I}\right)$.

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 45: Hàm số $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos^3\dfrac{x}{2}}\cdot$

B. $y'=\tan^3\dfrac{x}{2}\cdot$

C. $y'=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot$

D. $y'=\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^3\dfrac{x}{2}}\cdot$

Câu 46: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$. Giá trị $f'\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 0.

C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot$

D. $\dfrac{2}{\pi}\cdot$

Câu 47: Để tính đạo hàm của hàm số $y=\sin x.\cos x$, một học sinh tính theo hai cách sau:

(I) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ (II) $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow y'=\cos 2x$

Cách nào **ĐÚNG**?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Không cách nào.

D. Cả hai cách.

Câu 48: Hàm số $y=\cot 3x-\dfrac{1}{2}\tan 2x$ có đạo hàm là

A. $\dfrac{-3}{\sin^2 3x}+\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot$

B. $\dfrac{-3}{\sin^2 3x}-\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot$

C. $\dfrac{-3}{\sin^2 3x}-\dfrac{x}{\cos^2 2x}\cdot$

D. $\dfrac{-1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot$

Câu 49: Đạo hàm của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos 2x+x$ là

A. $y'=4\sin x+\sin 2x+1$.

B. $y'=4\sin 2x+1$.

C. $y'=1$.

D. $y'=4\sin x-2\sin 2x+1$.

Câu 50: Hàm số $y=\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)$ có đạo hàm là:

A. $y'=\cos x-\sin x+1$.

B. $y'=\cos x+\sin x+\cos 2x$.

C. $y'=\cos x-\sin x+\cos 2x$.

D. $y'=\cos x+\sin x+1$.

Câu 51: Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm là

A. $y'=\cot x$.

B. $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot$

C. $y'=1-\tan^2 x$.

D. $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}$ là

A. $y'=-2\sin(\pi-4x)+\dfrac{\pi}{2}$.

B. $y'=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\dfrac{\pi}{2}$.

C. $y'=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\dfrac{\pi}{2}x$.

D. $y'=-2\sin(\pi-4x)$.

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{2+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$ là

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$.

B. $y'=\dfrac{1+\tan^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$.

C. $y'=\dfrac{1+\tan^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}.\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

D. $y'=\dfrac{1+\tan^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}.\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Câu 54: Hàm số $y=f(x)=\dfrac{2}{\cot(\pi x)}$ có $f'(3)$ bằng

A. 8. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** 2π.

Câu 55: Cho hàm số $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$. Xét hai kết quả:

(I) $y'=\dfrac{(\cos x-\sin x)(1+\cos x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ (II) $y'=\dfrac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$

Kết quả nào đúng?

A. Cả hai đều sai.

B. Chỉ (II).

C. Chỉ (I).

D. Cả hai đều đúng.

Câu 56: Đạo hàm của hàm số $y=\cot^2(\cos x)+\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}$ là

A. $y'=-2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}}$.

B. $y'=2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}.\sin x+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}}$.

C. $y' = -2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \dfrac{\pi}{2}}}$.

D. $y' = 2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}.\sin x + \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \dfrac{\pi}{2}}}$.

Câu 57: Xét hàm số $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + x\right)$. Giá trị $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 58: Đạo hàm của hàm số $y = x^2\tan x + \sqrt{x}$ là

A. $y' = 2x\tan x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $\dfrac{2}{3}$

C. $y' = 2x\tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x\tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Giá trị $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 60: Cho $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Giá trị $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 0

Câu 61: Cho hàm số $y=\cos 2x.\sin^2\dfrac{x}{2}$. Xét hai kết quả sau:

(I) $y' = -2\sin 2x\sin^2\dfrac{x}{2} + \sin x.\cos 2x$ (II) $y' = 2\sin 2x\sin^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Không cách nào.

D. Cả hai đều đúng.

Câu 62: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\cos 2x}{3x+1}$ là

A. $y' = \dfrac{-2\sin 2x(3x+1) - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

B. $y' = \dfrac{-2\sin 2x(3x+1) - 3\cos 2x}{3x+1}$.

C. $y' = \dfrac{-\sin 2x(3x+1) - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

D. $y' = \dfrac{2\sin 2x(3x+1) + 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Câu 63: Hàm số $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ có đạo hàm bằng

A. $\dfrac{-x^2.\sin 2x}{(\cos x+x\sin x)^2}$ **B.** $\dfrac{-x^2.\sin^2 x}{(\cos x+x\sin x)^2}$

C. $\dfrac{-x^2.\cos 2x}{(\cos x+x\sin x)^2}$ **D.** $\left(\dfrac{x}{\cos x+x\sin x}\right)^2$

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Giá trị biểu thức $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 65: Hàm số $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$ có đạo hàm bằng:

A. $-\dfrac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. **B.** $-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$. **C.** $\dfrac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. **D.** $\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 66: Cho hàm số $y=\cot^2\dfrac{x}{4}$. Khi đó nghiệm của phương trình $y'=0$ là:

A. $\pi+k2\pi$. **B.** $2\pi+k4\pi$. **C.** $2\pi+k\pi$. **D.** $\pi+k\pi$.

Câu 67: Hàm số $y=\sin^2 x\cos x$ có đạo hàm là:

A. $y'=\sin x\left(3\cos^2 x+1\right)$. **B.** $y'=\sin x\left(3\cos^2 x-1\right)$.

C. $y'=\sin x\left(\cos^2 x-1\right)$. **D.** $y'=\sin x\left(\cos^2 x+1\right)$.

Câu 68: Hàm số $y=\dfrac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là:

A. $y'=(1+\tan x)^2$. **B.** $y'=1+\tan^2 x$.

C. $y'=(1+\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)$. **D.** $y'=1+\tan x$.

Câu 69: Để tính đạo hàm của hàm số $y=\cot x$ ($x\neq k\pi$), một học sinh thực hiện theo các bước sau:

(I) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ có dạng $\dfrac{u}{v}$

(II) Áp dụng công thức tính đạo hàm ta có: $y'=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$

(III) Thực hiện các phép biến đổi, ta được $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\left(1+\cot^2 x\right)$

Hãy xác định xem bước nào đúng?

A. Chỉ (II). **B.** Chỉ (III).

C. Chỉ (I). **D.** Cả ba bước đều đúng.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.D	4.D	5.C	6.C	7.B	8.B	9.B	10.B
11.C	12.B	13.B	14.C	15.C	16.A	17.D	18.D	19.C	20.B
21.A	22.D	23.A	24.B	25.A	26.C	27.A	28.C	29.A	30.D
31.B	32.A	33.D	34.B	35.D	36.A	37.C	38.D	39.B	40.D
41.A	42.D	43.A	44. C	45.D	46.B	47. C	48.B	49.B	50.C
51.D	52.A	53.C	54.D	55.C	56.B	57.D	58.C	59.B	60.C
61.C	62.A	63.D	64.A	65.B	66.B	67.B	68.C	69.C	

Hướng dẫn giải bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số $y=\sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\dfrac{1+\tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{-(1+\tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1+\cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. **D.** $y'=\dfrac{-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\dfrac{\left(\cot 2x\right)'}{2\sqrt{\cot 2x}}=\dfrac{-2\left(1+\cot^2 2x\right)}{2\sqrt{\cot 2x}}=\dfrac{-\left(1+\cot^2 2x\right)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

Chọn D.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y=3\sin 2x+\cos 3x$ là:

A. $y'=3\cos 2x-\sin 3x$. **B.** $y'=3\cos 2x+\sin 3x$.

C. $y'=6\cos 2x-3\sin 3x$. **D.** $y'=-6\cos 2x+3\sin 3x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3.2\cos 2x-3\sin 3x=6\cos 2x-3\sin 3x$.

Chọn C.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ là:

A. $y'=\dfrac{-\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$.

C. $y'=\dfrac{-2-2\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-2}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $y'=\dfrac{\left(\sin x+\cos x\right)'\left(\sin x-\cos x\right)-\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)'}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}=$

$=\dfrac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\sin x-\cos x\right)-\left(\sin x+\cos x\right)\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}=$

$=\dfrac{-(\cos x-\sin x\ )^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Cách 2: Ta có $y'=\dfrac{1.(-1)-1.1}{(\sin x-\cos x)^2}=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Chọn D.

Câu 4: Hàm số $y=2\sqrt{\sin x}-2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$. **D.** $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=2\dfrac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}-2\dfrac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Chọn D.

Câu 5: Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm là:

A. $y'=-\tan x$. **B.** $y'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $y'=1+\cot^2 x$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bảng công thưc đạo hàm.

Chọn C.

Câu 6: Hàm số $y=x\tan 2x$ ó đạo hàm là:

A. $\tan 2x+\dfrac{2x}{\cos^2 x}$. **B.** $\dfrac{2x}{\cos^2 2x}$.

C. $\tan 2x+\dfrac{2x}{\cos^2 2x}$. **D.** $\tan 2x+\dfrac{x}{\cos^2 2x}$.

Hướng dẫn giải

$y'=x'\tan 2x+x(\tan 2x)'=\tan 2x+x\dfrac{(2x)'}{\cos^2 2x}=\tan 2x+x.\dfrac{2}{\cos^2 2x}$.

Chọn C.

Câu 7: Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm là:

A. $y'=-\sin x$. **B.** $y'=\cos x$.

C. $y'=\dfrac{1}{\cos x}$. **D.** $y'=-\cos x$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bảng công thức đạo hàm.

Chọn B.

Câu 8: Hàm số $y=-\frac{3}{2}\sin 7x$ có đạo hàm là:

A. $-\frac{21}{2}\cos x.$ **B.** $-\frac{21}{2}\cos 7x.$ **C.** $\frac{21}{2}\cos 7x.$ **D.** $\frac{21}{2}\cos x.$

Hướng dẫn giải

$y'=\left(-\frac{3}{2}\sin 7x\right)'=-\frac{3}{2}.(7x)'\cos 7x=-\frac{21}{2}\cos 7x$.

Chọn B.

Câu 9: Hàm số $y=\frac{\sin x}{x}$ có đạo hàm là:

A. $y'=\frac{x\sin x-\cos x}{x^2}.$ **B.** $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$

C. $y'=\frac{x\cos x+\sin x}{x^2}.$ **D.** $y'=\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}.$

Hướng dẫn giải

$y'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x'\sin x-x(\sin x)'}{x^2}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}$.

Chọn B.

Câu 10: Đạo hàm của $y=\sqrt{\cot x}$ là :

A. $\frac{-1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}.$ **B.** $\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}.$ **C.** $\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}.$ **D.** $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cot x}}.$

Hướng dẫn giải

$y'=\left(\sqrt{\cot x}\right)'=\frac{(\cot x)'}{2\sqrt{\cot x}}=\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$.

Chọn B.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\left(\sqrt{\sin x}\right)^2}=-\frac{\cos x}{\sin x}=-\tan x$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Chọn C.

Câu 12: Hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ có đạo hàm là:

A. $3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. **B.** $-3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

C. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. **D.** $-3\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bảng công thức đạo hàm của hàm số hợp: $(\sin u)' = u'.\cos u$

Chọn B.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\cot x$. Giá trị đúng của $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $-\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** $-\frac{8}{9}$.

Hướng dẫn giải

$$y'=f'(x)=\left(-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\cot x\right)'=\left(-\cot x.\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{3}\cot x\right)'=\left(-\cot x.(1+\cot^2 x)+\frac{4}{3}\cot x\right)'$$

$$=\left(\cot^3 x+\frac{1}{3}\cot x\right)'=3\cot^2 x.(\cot x)'-\frac{1}{\sin^2 x}=-\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{9}{8}$

Chọn B.

Câu 14: Cho hàm số $y=\sin\sqrt{2+x^2}$. Đạo hàm y' của hàm số là

A. $\frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **B.** $-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

C. $\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **D.** $\frac{(x+1)}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

Hướng dẫn giải

$$y'=\left(\sin\sqrt{2+x^2}\right)'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\cos\sqrt{2+x^2}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$$

Chọn C.

Câu 15: Hàm số $y=\tan x-\cot x$ có đạo hàm là:

A. $y'=\frac{1}{\sin^2 2x}$. **B.** $y'=\frac{4}{\cos^2 2x}$.

C. $y'=\frac{4}{\sin^2 2x}$. **D.** $y'=\frac{1}{\cos^2 2x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\left(\tan x-\cot x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x.\sin^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}$

Chọn C.

Câu 16: Đạo hàm của $y=\tan 7x$ bằng:

A. $\frac{7}{\cos^2 7x}$. **B.** $-\frac{7}{\cos^2 7x}$. **C.** $-\frac{7}{\sin^2 7x}$. **D.** $\frac{7x}{\cos^2 7x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\left(\tan 7x\right)'=\frac{7}{\cos^2 7x}$

Chọn A.

Câu 17: Hàm số $y=\frac{1}{2}\cot x^2$ có đạo hàm là:

A. $\frac{-x}{2\sin x^2}$. **B.** $\frac{x}{\sin^2 x^2}$. **C.** $\frac{-x}{\sin x^2}$. **D.** $\frac{-x}{\sin^2 x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2\right)'}{\sin^2 x^2}=-\frac{x}{\sin^2 x^2}$

Chọn D

Câu 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt[3]{\cos 2x}$. Hãy chọn khẳng định **ĐÚNG.**

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. **B.** $f'\left(x\right)=\frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos 2x}}$.

C. $3y.y'+2\sin 2x=0$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\frac{\left(\cos 2x\right)'}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}=-\frac{2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Chọn D.

Câu 19: Cho hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$. Khi đó phương trình $y'=0$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. **B.** $x=\frac{\pi}{3}-k\pi$.

C. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$. **D.** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}-2k\pi, k\in Z$

Chọn C (vì $x=-\frac{\pi}{3}-2k\pi,k\in Z\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2l\pi,l\in\mathbb{Z}$)

Câu 20: Đạo hàm của $y=\sqrt{\cos x}$ là

A. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}$. **B.** $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. **C.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. **D.** $\frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

Chọn B.

Câu 21: Hàm số $y=x^2.\cos x$ có đạo hàm là

A. $y'=2x\cos x-x^2\sin x$. **B.** $y'=2x\cos x+x^2\sin x$.

C. $y'=2x\sin x+x^2\cos x$. **D.** $y'=2x\sin x-x^2\cos x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=2x.\cos x+x^2.\left(-\sin x\right)=2x\cos x-x^2.\sin x$

Chọn A.

Câu 22: Đạo hàm của hàm số $y=\sin^2 2x.\cos x+\frac{2}{\sqrt{x}}$ là

A. $y'=2\sin 2x.\cos x-\sin x.\sin^2 2x-2\sqrt{x}$.

B. $y'=2\sin 2x.\cos x-\sin x.\sin^2 2x-2\sqrt{x}$.

C. $y'=2\sin 4x.\cos x+\sin x.\sin^2 2x-\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

D. $y'=2\sin 4x.\cos x-\sin x.\sin^2 2x-\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$y'=2\sin 2x.\cos 2x.\cos x+\sin^2 2x.\left(-\sin x\right)-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\sin 4x.\cos x-\sin^2 2x.\sin x-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Chọn D.

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 x-\cot^2 x$ là

A. $y'=2\frac{\tan x}{\cos^2 x}+2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$. **B.** $y'=2\frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$.

C. $y'=2\frac{\tan x}{\sin^2 x}+2\frac{\cot x}{\cos^2 x}$. **D.** $y'=2\tan x-2\cot x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-2\cot x.\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+\frac{2\cot x}{\sin^2 x}$

Chọn A.

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y=\cos(\tan x)$ bằng

A. $\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$ **B.** $-\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$

C. $\sin(\tan x)$. **D.** $-\sin(\tan x)$.

Hướng dẫn giải

$y'=-\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Chọn B.

Câu 25: Hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm là

A. $y'=-\sin x$. **B.** $y'=-\cos x$. **C.** $y'''=-72x+24$ **D.** $y'=\sin x$.

Hướng dẫn giải

$y'=-\sin x$.

Chọn A.

Câu 26: Đạo hàm của hàm số $f(x)=2\sin 2x+\cos 2x$ là

A. $4\cos 2x+2\sin 2x$. **B.** $2\cos 2x-2\sin 2x$.

C. $4\cos 2x-2\sin 2x$. **D.** $-4\cos 2x-2\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

$f'(x)=4\cos 2x-2\sin 2x$

. **Chọn C.**

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$ là y' bằng

A. $-2\sin 2x$. **B.** $-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$.

C. $2\sin 2x$. **D.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$.

Hướng dẫn giải

$y'=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=-2\sin(2x)$. **Chọn A.**

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Biểu thức $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. -3. **B.** $\dfrac{8}{3}\cdot$ **C.** 3. **D.** $-\dfrac{8}{3}\cdot$

Hướng dẫn giải

$$f'(x)=\frac{-2\cos x\sin x\left(1+\sin^2 x\right)-2\cos x\sin x\cos^2 x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$$

$$=\frac{-2\cos x\sin x\left(1+\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}=\frac{-4\cos x\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-8}{9}$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3$.

Chọn **C.**

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\sin^3 5x.\cos^2\frac{x}{3}$. Giá trị đúng của $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Hướng dẫn giải

$f'\left(x\right)=3.5.\cos 5x.\sin^2 5x.\cos^2\frac{x}{3}-\sin^3 5x\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1.\frac{\sqrt{3}}{2.3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot$

Chọn **A.**

Câu 30: Đạo hàm của $y=\sin^2 4x$ là

A. $2\sin 8x$. **B.** $8\sin 8x$. **C.** $\sin 8x$. **D.** $4\sin 8x$.

Hướng dẫn giải

$y'=2.4.\sin 4x.\cos 4x=4\sin 8x$.

Chọn **D.**

Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)=\tan\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$. Giá trị $f'\left(0\right)$ bằng

A. $-\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** -3. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

$f'\left(x\right)=\frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}\Rightarrow f'\left(0\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$.

Chọn **B.**

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$. Chọn kết quả **SAI**

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{5}{4}\cdot$ **B.** $f'\left(0\right)=-2$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}\cdot$ **D.** $f'\left(\pi\right)=-2$.

Hướng dẫn giải

$f'\left(x\right)=\frac{-\sin x.\left(1+2\sin x\right)-\cos x.2.\cos x}{\left(1+2\sin x\right)^2}=\frac{-\sin x-2}{\left(1+2\sin x\right)^2}$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-5}{8};f'\left(0\right)=-2;f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{3};f'\left(\pi\right)=-2$.

Chọn **A.**

Câu 33: Hàm số $y = 2\cos x^2$ có đạo hàm là

A. $-2\sin x^2$. **B.** $-4x\cos x^2$. **C.** $-2x\sin x^2$. **D.** $-4x\sin x^2$.

Hướng dẫn giải

$y' = -2.2x.\sin x^2 = -4x\sin x^2$.

Chọn D.

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{\sin 3x}$ là

A. $\dfrac{3\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}$. **B.** $\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. **C.** $-\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. **D.** $\dfrac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.

Hướng dẫn giải

$f'\left(x\right) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}$.

Chọn B.

Câu 35: Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos 3x}$. Khi đó $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -\sqrt{2}.\dfrac{\left(\cos 3x\right)'}{\cos^2 3x} = \dfrac{3\sqrt{2}.\sin 3x}{\cos^2 3x}$. Do đó $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}.\sin\pi}{\cos^2\pi} = 0$

Chọn D.

Câu 36: Hàm số $y = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$ có đạo hàm là:

A. $x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$. **B.** $\dfrac{1}{2}x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

C. $\dfrac{1}{2}x\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$. **D.** $\dfrac{1}{2}x\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -\dfrac{1}{2}.\left(-2x\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right) = x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$

Chọn A.

Câu 37: Cho hàm số $y = \cos(x)$. Khi đó $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ có giá trị nào sau đây?

A. 1 **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -\sin x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Chọn C

Câu 38: Cho hàm số $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$. Khi đó phương trình $y' = 0$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$.

C. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -2.\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$

Theo giả thiết $y' = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Chọn D.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \ge 0 \\ \sin(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm khẳng định **SAI**?

A. Hàm số f không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

B. Hàm số f không liên tục tại $x_0 = 0$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin(-x) = \sin 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x_0 = 0$

Chọn B.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x) = \sin(\pi \sin x)$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $-\frac{\pi}{2}$.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = (\pi.\sin x)'.\cos(\pi.\sin x) = \pi.\cos x.\cos(\pi.\sin x)$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi.\cos\frac{\pi}{6}.\cos\left(\pi.\sin\frac{\pi}{6}\right) = \pi.\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\left(\pi.\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}.\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Chọn D.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong bốn biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm $f(x)$ thỏa mãn $y' = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $x + \frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $x - \frac{1}{2}\cos 2x$. **C.** $x - \sin 2x$. **D.** $x + \sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = f'(x) - 2.\cos x.(-\sin x) = f'(x) + 2.\cos x.\sin x = f'(x) + \sin 2x$

$$\Rightarrow y' = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

Chọn A.

Câu 42: Đạo hàm của hàm số $y = -\dfrac{2}{\tan(1-2x)}$ bằng:

A. $\dfrac{4x}{\sin^2(1-2x)}$ **B.** $\dfrac{-4}{\sin(1-2x)}$

C. $\dfrac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$ **D.** $\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -2.\dfrac{-(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = 2\cdot\dfrac{-2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2(1-2x)} = \dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$

Chọn D.

Câu 43: Chọn mệnh đề **ĐÚNG** trong các mệnh đề sau?

A. Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

B. Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

C. Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

D. Hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 44: Cho hàm số $y = \sqrt{x\tan x}$. Xét hai đẳng thức sau:

(I) $y' = \dfrac{x\left(\tan^2 x + \tan x + 1\right)}{2\sqrt{x\tan x}}$ (II) $y' = \dfrac{x\tan^2 x + \tan x + 1}{2\sqrt{x\tan x}}$

Đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ (II). **B.** Chỉ (I).

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \dfrac{(x.\tan x)'}{2.\sqrt{x.\tan x}} = \dfrac{x'.\tan x + x.(\tan x)'}{2.\sqrt{x.\tan x}} = \dfrac{\tan x + x.\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2.\sqrt{x.\tan x}} = \dfrac{\tan x + x.\left(1+\tan^2 x\right)}{2.\sqrt{x.\tan x}}$

Chọn C.

Câu 45: Hàm số $y = \tan^2 \dfrac{x}{2}$ có đạo hàm là

A. $y' = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos^3\dfrac{x}{2}}$. **B.** $y' = \tan^3\dfrac{x}{2}$.

C. $y' = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$. **D.** $y' = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^3\dfrac{x}{2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 2\tan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^3\dfrac{x}{2}}$

Chọn D.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x) = \sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}$. Giá trị $f'\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi^2}{16}\right) = 0$

Chọn B.

Câu 47: Để tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x.\cos x$, một học sinh tính theo hai cách sau:

(I) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ (II) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow y' = \cos 2x$

Cách nào **ĐÚNG**?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Không cách nào. **D.** Cả hai cách.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 48: Hàm số $y=\cot 3x-\frac{1}{2}\tan 2x$ có đạo hàm là

A. $\frac{-3}{\sin^2 3x}+\frac{1}{\cos^2 2x}$. **B.** $\frac{-3}{\sin^2 3x}-\frac{1}{\cos^2 2x}$.

C. $\frac{-3}{\sin^2 3x}-\frac{x}{\cos^2 2x}$. **D.** $\frac{-1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 2x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{3}{\sin^2 3x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}=-\frac{3}{\sin^2 3x}-\frac{1}{\cos^2 2x}$

Chọn B.

Câu 49: Đạo hàm của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos 2x+x$ là

A. $y'=4\sin x+\sin 2x+1$. **B.** $y'=4\sin 2x+1$.

C. $y'=1$. **D.** $y'=4\sin x-2\sin 2x+1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=4\sin x\cos x+2\sin 2x+1=4\sin 2x+1$.

Chọn B.

Câu 50: Hàm số $y=(1+\sin x)(1+\cos x)$ có đạo hàm là:

A. $y'=\cos x-\sin x+1$. **B.** $y'=\cos x+\sin x+\cos 2x$.

C. $y'=\cos x-\sin x+\cos 2x$. **D.** $y'=\cos x+\sin x+1$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y=(1+\sin x)(1+\cos x)=1+\sin x+\cos x+\sin x.\cos x=1+\sin x+\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Suy ra: $y'=\cos x-\sin x+\cos 2x$.

Chọn C.

Câu 51: Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm là

A. $y'=\cot x$. **B.** $y'=\frac{1}{\sin^2 x}$.

C. $y'=1-\tan^2 x$. **D.** $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}$ là

A. $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}\cdot$ **B.** $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}.$

C. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}x.$ **D.** $y' = -2\sin(\pi - 4x).$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos(\pi - 4x)}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$

Suy ra: $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}\cdot$

Chọn C.

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$ là

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}\cdot$ **B.** $y' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}\cdot$

C. $y' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}.\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$ **D.** $y' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}.\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y' = \frac{\left[2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]'}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}\cdot\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Chọn C.

Câu 54: Hàm số $y = f(x) = \frac{2}{\cot(\pi x)}$ có $f'(3)$ bằng

A. 8. **B.** $\frac{8\pi}{3}\cdot$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot$ **D.** 2π .

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -\frac{2\left[\cot(\pi x)\right]'}{\cot^2(\pi x)} = 2\pi\frac{1 + \cot^2(\pi x)}{\cot^2(\pi x)} \Rightarrow f'(3) = 2\pi$.

Chọn C.

Câu 55: Cho hàm số $y=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$. Xét hai kết quả:

(I) $y'=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\cos x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ (II) $y'=\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$

Kết quả nào đúng?

A. Cả hai đều sai. **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (I). **D.** Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\sin x+\cos x}{(1+\cos x)^2}$

Chọn đáp án **B.**

Câu 56: Đạo hàm của hàm số $y=\cot^2(\cos x)+\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}$ là

A. $y'=-2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

B. $y'=2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}.\sin x+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

C. $y'=-2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

D. $y'=2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}.\sin x+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

Hướng dẫn giải

$$y'=2\cot(\cos x).(\cot(\cos x))'+\frac{\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}=2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}.\sin x+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$$

Chọn đáp án **B.**

Câu 57: Xét hàm số $f(x)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=2\cos\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2$

Chọn đáp án **D.**

Câu 58: Đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$ là

A. $y' = 2x\tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **B.** $\frac{2}{3}$

C. $y' = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **D.** $y' = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \left(x^2\right)' \tan x + \left(\tan x\right)'.x^2 + \left(\sqrt{x}\right)' \Rightarrow y' = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Chọn C.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = \frac{\left(\tan x + \cot x\right)'}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Chọn đáp án **B.**

Câu 60: Cho $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$. Do đó $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$

Chọn C.

Câu 61: Cho hàm số $y = \cos 2x.\sin^2\frac{x}{2}$. Xét hai kết quả sau:

(I) $y' = -2\sin 2x \sin^2\frac{x}{2} + \sin x.\cos 2x$ (II) $y' = 2\sin 2x\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x.\cos 2x$

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Không cách nào. **D.** Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \left(\cos 2x\right)'.\sin^2\frac{x}{2} + \left(\sin^2\frac{x}{2}\right)'.\cos 2x = -2\sin 2x.\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x.\cos 2x.$

Chọn C.

Câu 62: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$ là

A. $y'=\dfrac{-2\sin 2x(3x+1)-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

B. $y'=\dfrac{-2\sin 2x(3x+1)-3\cos 2x}{3x+1}$.

C. $y'=\dfrac{-\sin 2x(3x+1)-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

D. $y'=\dfrac{2\sin 2x(3x+1)+3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\dfrac{(\cos 2x)'(3x+1)-(3x+1)'.\cos 2x}{(3x+1)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{-2\sin 2x(3x+1)-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Chọn A.

Câu 63: Hàm số $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ có đạo hàm bằng

A. $\dfrac{-x^2.\sin 2x}{(\cos x+x\sin x)^2}$

B. $\dfrac{-x^2.\sin^2 x}{(\cos x+x\sin x)^2}$

C. $\dfrac{-x^2.\cos 2x}{(\cos x+x\sin x)^2}$

D. $\left(\dfrac{x}{\cos x+x\sin x}\right)^2$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y'=\dfrac{(\sin x-x\cos x)'(\cos x+x\sin x)-(\cos x+x\sin x)'(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$$=\dfrac{x\sin x(\cos x+x\sin x)-x\cos x(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}=\left(\dfrac{x}{\cos x+x\sin x}\right)^2$$

Chọn D.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Giá trị biểu thức $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(\cos x)'(1-\sin x)-(1-\sin x)'\cos x}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{1}{1-\sin x}\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{3}$

Chọn A.

Câu 65: Hàm số $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$ có đạo hàm bằng:

A. $-\dfrac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. **B.** $-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$. **C.** $\dfrac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. **D.** $\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\left(\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}\right)'=\dfrac{\sin^2 x(\cos x)'-(\sin^2 x)\cos x}{2\sin^4 x}=\dfrac{-\sin^3 x-2\sin x\cos x\cos x}{2\sin^4 x}$

$=-\dfrac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}=-\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$

Chọn B.

Câu 66: Cho hàm số $y=\cot^2\dfrac{x}{4}$. Khi đó nghiệm của phương trình $y'=0$ là:

A. $\pi+k2\pi$. **B.** $2\pi+k4\pi$. **C.** $2\pi+k\pi$. **D.** $\pi+k\pi$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\left(\cot^2\dfrac{x}{4}\right)'=2\cot\dfrac{x}{4}\left(\cot\dfrac{x}{4}\right)'=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{4}\left(1+\cot^2\dfrac{x}{4}\right)$

Mà: $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{4}\left(1+\cot^2\dfrac{x}{4}\right)\Leftrightarrow\cot\dfrac{x}{4}=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Chọn B.

Câu 67: Hàm số $y=\sin^2 x\cos x$ có đạo hàm là:

A. $y'=\sin x(3\cos^2 x+1)$. **B.** $y'=\sin x(3\cos^2 x-1)$.

C. $y'=\sin x(\cos^2 x-1)$. **D.** $y'=\sin x(\cos^2 x+1)$.

Hướng dẫn giải

$y'=(\sin^2 x\cos x)'=(\sin^2 x)'\cos x+\sin^2 x(\cos x)'=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x(3\cos^2 x-1)$

.

Chọn B.

Câu 68: Hàm số $y=\dfrac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là:

A. $y'=(1+\tan x)^2$. **B.** $y'=1+\tan^2 x$.

C. $y'=(1+\tan x)(1+\tan^2 x)$. **D.** $y'=1+\tan x$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y'=\left[\dfrac{1}{2}(1+\tan x)^2\right]'=(1+\tan x)(1+\tan x)'=(1+\tan x)(1+\tan^2 x)$.

Chọn C.

Câu 69: Để tính đạo hàm của hàm số $y=\cot x$ ($x\neq k\pi$), một học sinh thực hiện theo các bước sau:

(I) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ có dạng $\frac{u}{v}$

(II) Áp dụng công thức tính đạo hàm ta có: $y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

(III) Thực hiện các phép biến đổi, ta được $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$

Hãy xác định xem bước nào đúng?

A. Chỉ (II). **B.** Chỉ (III).

C. Chỉ (I). **D. C**ả ba bước đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.